2.B.

$$f(x,y) = x^3 \cdot \cos(y-2) + e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \cdot \cos(y-2) + e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^3 \sin(y-2)$$

Calc-zilla: $f(x,y) = y^x = e^{\log(y^x)} = e^{x \log y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x \log y} \cdot \log y = y^x \cdot \log y$$

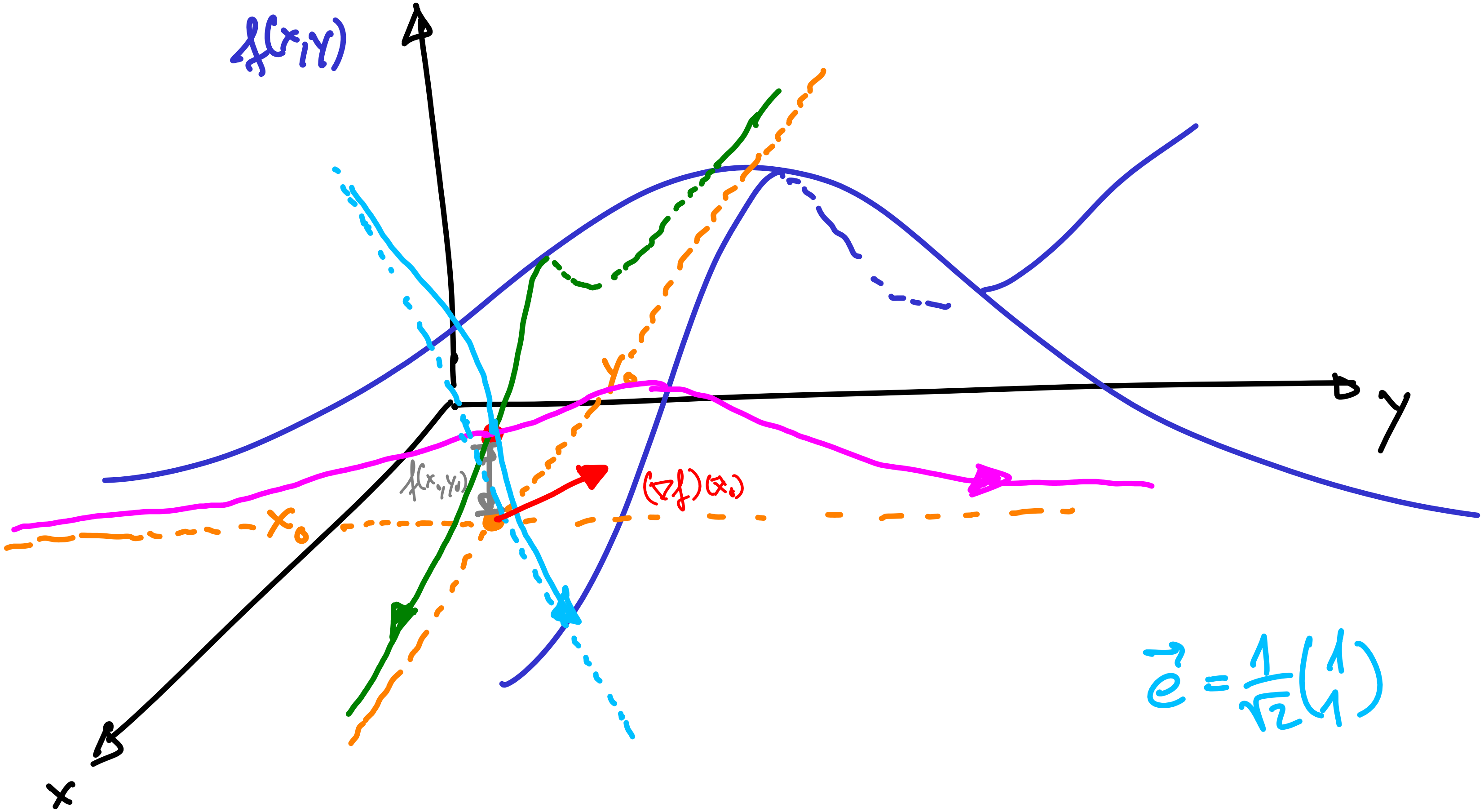
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2) = f(\vec{x})$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} + h\,\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + h \\ x_2 \end{pmatrix}$$

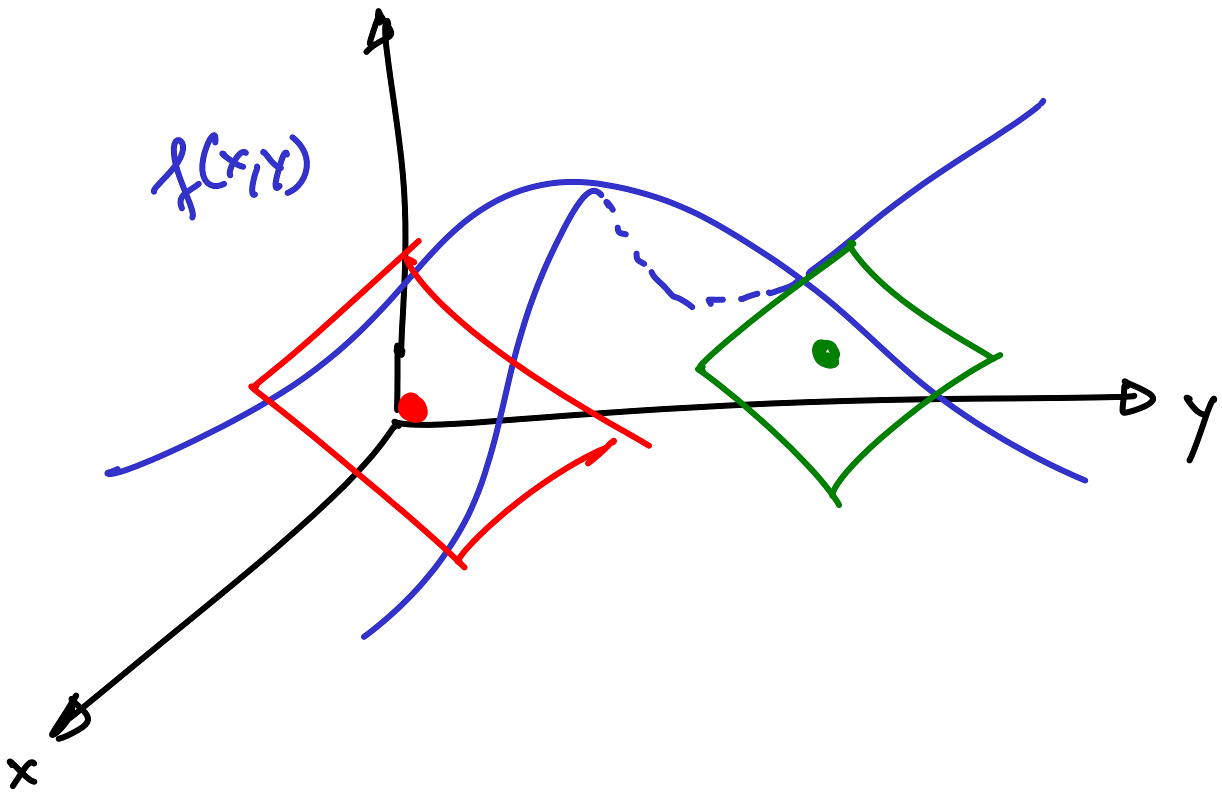
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ = Steigung des grünen Weges an der Stelle (x_0, y_0) < 0

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ = Steigung des rosa Weges an der Stelle (x_0, y_0) > 0

$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0)$ = Steigung des hellblauen Weges an der Stelle (x_0, y_0)



f(x,y)
y
x

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\vec{a}\,(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{}$$

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$= a_1(x_1 - x_{01}) + a_2(x_2 - x_{02}) + \ldots$$

$$\frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial x_1}(\vec{x}_0) = a_1 \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$$

analog für $a_2, a_3, \ldots$

d.h.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

nennt man <u>Gradient</u>

und schreibt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

sprich "Nabla" (∇)

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\nabla f)(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \qquad (*)$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{T_{\vec{x}_0}(\vec{x}_0 + h\vec{e}) - T_{\vec{x}_0}(\vec{x}_0)}{h}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(\vec{x}_0)} + (\nabla f)(\vec{x}_0)\cdot(\cancel{\vec{x}_0} + h\vec{e} - \cancel{\vec{x}_0}) - \cancel{f(\vec{x}_0)}}{h}$$

$$= (\nabla f)(\vec{x}_0)\cdot\vec{e}$$

Entlang einer Höhenlinie ändert sich Fkt.-Wert nicht

starte bei $\vec{x}_0$

$$\underset{\text{nahe } \vec{x}_0}{f(\vec{x})} \approx T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{(\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{Richtung in der wir laufen}}}_{=0 \text{ auf Höhenlinie}}$$

$$\Longleftrightarrow (\vec{x}-\vec{x}_0) \perp (\nabla f)(\vec{x}_0)$$

auf Höhenlinie

Umgekehrt: Diff. $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ wird maximal, wenn

$$(\vec{x}-\vec{x}_0) \parallel (\nabla f)(\vec{x}_0)$$

$\Rightarrow$ ∇f zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs zweite part. Abl.

$$f(x,y) = x^2 + x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \sin y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cos y$$

gleich ... Zufall?

für harmlose Fkt. immer gleich

(2. part. Abl. ex. & sind stetig)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \sin y$$

Hesse-Matrix : $H = \begin{pmatrix} 2 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix} = f''(x,y)$

$\vec{x} \cdot (A\vec{x})$ Ausdruck bei Definitheit

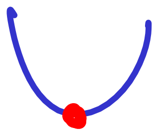
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot (A\vec{x}) = a\,x^2 + b\,xy + c\,xy + d\,y^2$$

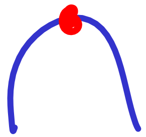
lokale Extrema (notwendig: $f' = 0$ bzw. $\nabla f = 0$)

1D



Minimum

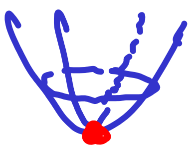
$f'' > 0$



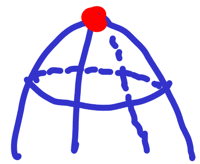
Maximum

$f'' < 0$

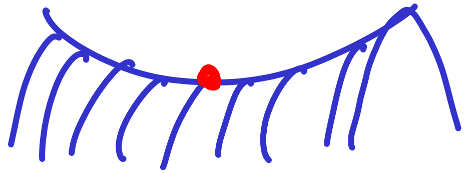
2D



Minimum



Maximum



Sattel

z.B. $f(x,y) = \underline{x^2+y^2}$ $\quad f(x,y) = \underline{-x^2-y^2}$ $\quad f(x,y) = \underline{x^2-y^2}$

von der Form $\vec{x} \cdot (A\vec{x})$