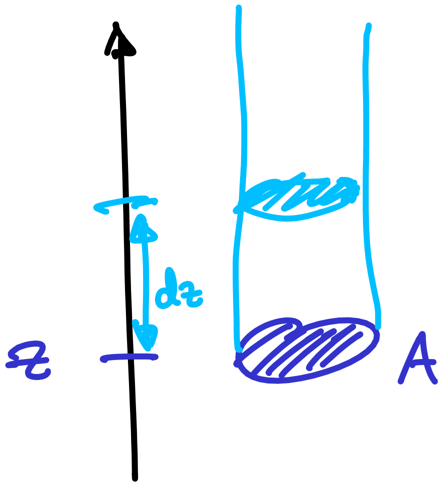
Druck = Kraft pro Fläche

$\uparrow$ Gewichtskraft der Luftsäule



Druckänderung: $z \longmapsto z + dz$

$$dp = -g \underbrace{m_{LS}}_{\text{Masse Luftsäule zw. } z \text{ \& } z+dz} / A$$

$$m_{LS} = \overset{\text{Volumen}}{V} \cdot \rho = A\, dz \cdot \overset{\text{Dichte}}{\rho}$$

auf Fl. der Höhe z

also:

$$\underbrace{\frac{dp}{dz}}_{= p'(z)} = -g \cdot A \cdot \rho / A = -g\, \rho(z)$$

ideales Gas:

$$pV = nRT$$

Gaskonstante (R), Molzahl (n), Temperatur (T)

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \quad p \frac{m}{\rho} = nRT \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \underbrace{\frac{m}{n}}_{=: M \text{ molare Masse}} \frac{p}{RT}$$

$$\boxed{p'(z) = -\underbrace{\frac{gM}{R}}_{\text{Konstante}} \frac{1}{T(z)}\, p(z)}$$

---

① $T(z) = T$ konstant

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gM}{RT}\cdot p \qquad \Big|\cdot \frac{1}{p}\,dz$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{gM}{RT}\, dz$$

$$\log p = -\frac{gM}{RT} z + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \qquad \Big| \exp(\dots)$$

$$p = e^{-\frac{gM}{RT} z + C} = \underbrace{e^{C}}_{\text{bel. Konstante}} e^{-\frac{gM}{RT} z}$$

Vergleiche mit

$$p(z) = p_0\, e^{-\frac{gM}{RT}(z - z_0)} = \underbrace{p_0\, e^{\frac{gM}{RT} z_0}}_{= e^{C}} \cdot e^{-\frac{gM}{RT} z}$$

Schreiben mit p_0 & z_0: p_0 ist Druck in Höhe z_0

② $T(z) = T_0 + \gamma (z - z_0)$ $\qquad (T(z_0) = T_0)$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{gM}{R} \int \frac{1}{T_0 + \gamma(z - z_0)} \, dz$$

$$\log p = -\frac{gM}{R} \log\left(T_0 + \gamma(z - z_0)\right) \cdot \frac{1}{\gamma} + C$$

$$= \log\left(\left(T_0 + \gamma(z - z_0)\right)^{-\frac{gM}{R\gamma}}\right) + C \qquad \Big| \exp(\dots)$$

$$p = \left(T_0 + \gamma(z - z_0)\right)^{-\frac{gM}{R\gamma}} \cdot e^{C}$$

klammer T_0 aus

$$= \underbrace{e^{C}\, T_0^{-\frac{gM}{R\gamma}}}_{\text{hieß auf Folie } p_0} \left(1 + \frac{\gamma}{T_0}(z - z_0)\right)^{-\frac{gM}{R\gamma}}$$

Bspe für DGLn $\quad x = x(t)$

① $\dot{x} + x = 0$ autonome DGL erster Ordnung

$d=1,\ h=1$

$$\dot{x} = f(x, \cancel{t}) = -x$$

② $\dot{x} + x = \sin t$ zeitabhängige (t: Zeit) DGL erster Ord.

$d=1,\ h=1$

$$\dot{x} = f(x,t) = -x + \sin t$$

③ $\ddot{x} + x = 0$ autonome DGL zweiter Ord.

$d=1,\ h=2$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) = -x$$

④ $\dot{x}_1 = x_2$ autonomes System erster Ord.

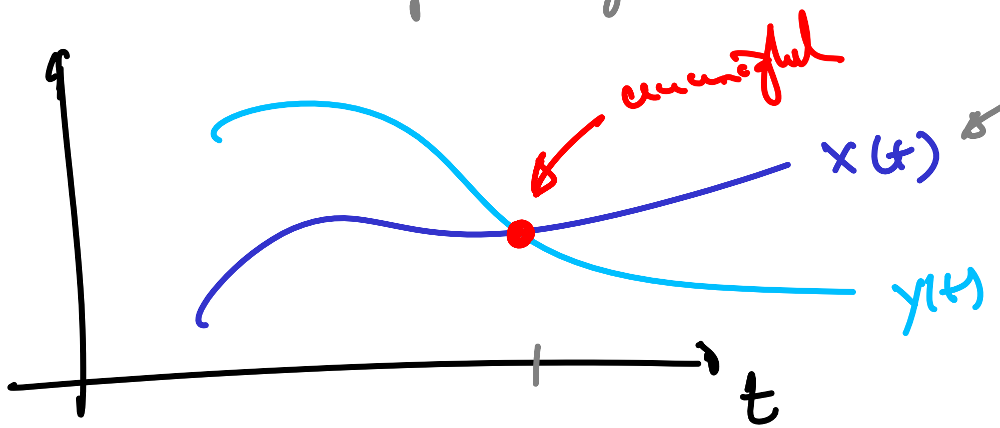
$d=2,\ h=1$

$\dot{x}_2 = -x_1$

in Vektorschreibweise $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}}_{= \vec{f}(x_1, x_2, \cancel{t})} = \vec{f}(\vec{x})$$

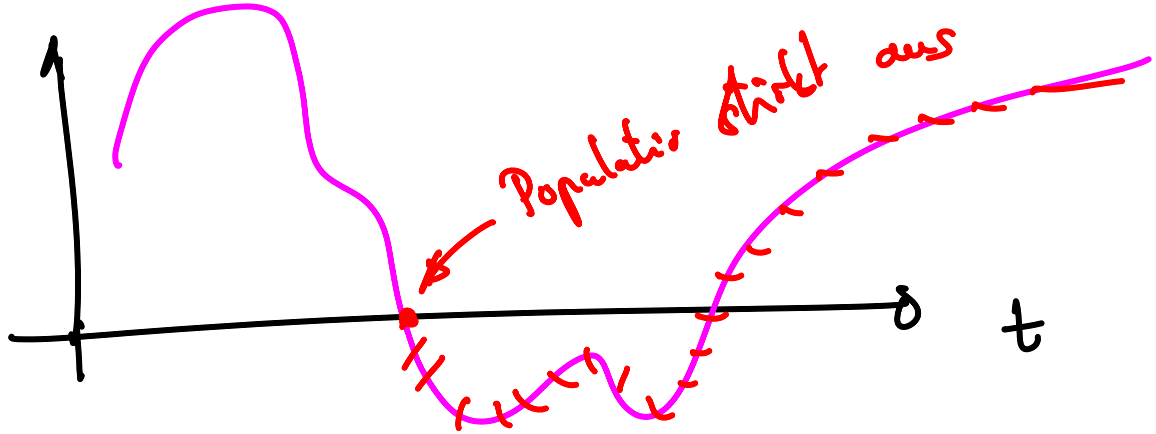
Picard-Lindelöf sagt



← Lösung der DGL

← auch Lösung der DGL

DGL für Populationsgröße N(t)



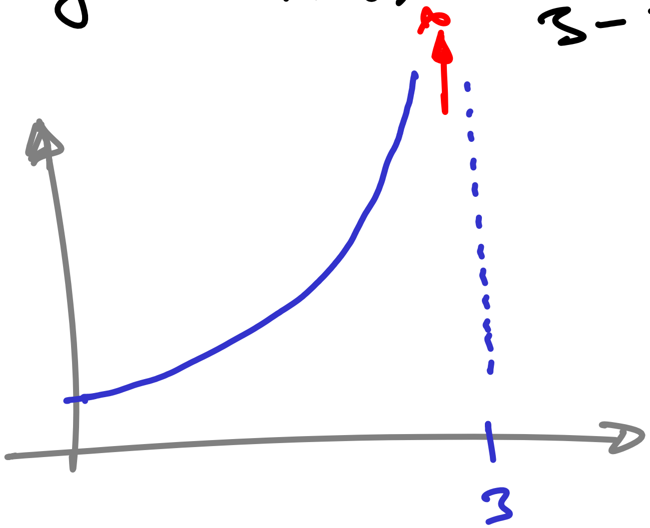
anderes Bsp

AWP: $\dot{x} = x^2$, $x(0) = \frac{1}{3}$

DGL + Anfangsbed.

$$\left(dx = x^2\, dt \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \quad \ldots \right)$$

Lösung: $x(t) = \frac{1}{3-t}$



$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} \underset{(*)}{=} -\omega^2 x = -\omega^2 x_1 \end{aligned}$$

rosa System äquivalent zu blauer Glu.

$\Rightarrow$ (*) hat <u>eindeutige</u> Lösung, wenn wir $x(t_0)$ & $\dot{x}(t_0)$ vorgeben

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE$$

Konz. von SE

$$\dot{s} = -k_1 \cdot s \cdot e + k_{-1} c$$

$$SE \xrightarrow{k_2} P + E$$

$$\dot{e} = -k_1 \cdot s \cdot e + k_{-1} c + k_2 c$$