

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 31.10.2014)

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} 3^{-l}$

b) $\sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^n \binom{\nu}{k} 3^{-\nu}$

c) $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \binom{l}{k} 3^{-k}$

Aufgabe 13 (10 Zusatzpunkte)

Das Pascalsche Dreieck baut man wie folgt aus den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auf:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \dots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \end{array}$$

Dabei wächst also n nach unten und k nach rechts hin. Die Beziehung

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

aus der Vorlesung sagt uns, dass am linken und rechten Rand ausschließlich Einsen stehen. Weiter folgt aus der Funktionalgleichung, dass sich alle anderen Einträge jeweils als Summe der beiden rechts und links darüberstehenden ergeben.

- a) Konstruieren Sie auf diese Weise die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks!
- b) Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

- c) Wie lässt sich die Spiegelsymmetrie des Pascalschen Dreiecks als Beziehung (Formel) zwischen Binomialkoeffizienten ausdrücken?

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n \geq n^3 \quad \forall n \geq 3.$$

Aufgabe 15

(20 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{und} \quad h(x) = x^3 + 1.$$

- a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und das Bild (als Teilmengen von \mathbb{R}).
- b) Existieren die folgenden Verknüpfungen? Geben Sie ggf. den Definitionsbereich und das Bild an.
- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| (i) $f \circ g$ | (ii) $g \circ f$ | (iii) $f \circ h$ |
| (iv) $h \circ f$ | (v) $g \circ h$ | (vi) $h \circ g$ |
- c) Geben Sie $(h \circ f)(x)$ und $(f \circ h)(x)$ an.

Aufgabe 16

(9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.12.14 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Calculating finite geometric series*,
- *Finite geometric series word problems* und
- *Arithmetic series*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).