Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 14.11.14)

Aufgabe 23 (10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $f(x) = |4 - x^2|$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ d) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^8 - 256}{x^3 + 8}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^3 - 27}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^n}{x-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 25 (10 Punkte)
Wie Sie wissen gilt beim Ableiten die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\big(fg\big)^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x)\, g^{(n-\nu)}(x)\,.$$

Zur Erinnerung: $f^{(k)}(x)$ ist die $k$te Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x, d.h. $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc.
Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch, und werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f(x) = o\big((x-x_0)^n\big) \quad \Leftrightarrow \quad (x-x_0)^k f(x) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$$

Dafür schreiben wir auch kurz $(x-x_0)^k\, o\big((x-x_0)^n\big) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ sowie $f(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ und $g(x) = o\big((x-x_0)^m\big)$. Zeigen Sie[1]

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (siehe Lemma 4).

---

[1] Dabei ist $\min(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2, 0, 1, 3) = 0$.

Aufgabe 27 (12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.12.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Derivative intuition*,
- *Graphs of functions and their derivatives*,
- *Visualizing derivatives* und
- *Power rule*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).