

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 21.11.2014)

Aufgabe 28

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+2}\right)^{2n-1} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2-n}\right)^{n/2}$$

Aufgabe 29

(10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- Für welche x sind die Funktionen definiert?
- Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 30

(10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

$$\text{a) } \sinh x, \quad \text{b) } \cosh x \quad \text{und} \quad \text{c) } \tanh x$$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun \sinh , \cosh und \tanh . Auf welchen Teilintervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 31

(10 Punkte)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh , d.h. $\text{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x$$

an. Bei a und c ist dies eindeutig – bei b sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-$.

Aufgabe 32

(10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x.$$

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 30.

Aufgabe 33

(18 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 18.01.15 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Limits at infinity where x is unbounded,*
- *Inverses of linear functions,*
- *Understanding inverses of functions,*
- *Algebraically finding inverses,*
- *Operations with logarithms* und
- *Fractional exponents 2.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).