Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 14/15
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 28.11.2014)

Aufgabe 34 (10 Punkte)

a) Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die Ableitung.

$$f_1(x) = \big(\log(x^2)\big)^3\,, \qquad f_2(x) = \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,, \qquad f_3(x) = \log_7(x)\,, \qquad f_4(x) := x^x\,.$$

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ sowie $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.
Hinweis: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Die Funktion f sei definiert durch

$$\log^3(f(x)) + \log(f(x)) + x = 7f(x)\,. \tag{$*$}$$

Weiter sei $x_0 := f^{-1}(1)$. Bemerkung: $\log^3 x = (\log x)^3$.

a) Bestimmen Sie x_0.
b) Berechnen Sie $f'(x_0)$.

Hinweis zu (b): Leiten Sie $(*)$ nach x ab und lösen Sie nach der gesuchten Größe auf.

Aufgabe 36 (10 Punkte)

a) Sei $f(x) = 7^x$. Bestimmen Sie $f'(x)$.
b) Seien $0 < p_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, mit $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$, sowie

$$S(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha}\,\log\left(\sum_{j=1}^{n} {p_j}^{\alpha}\right)$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{\alpha\to 1} S(\alpha)$. Hinweis: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

Aufgabe 37 (20 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall\ |x| < 1\,.$$

Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{1-7x}$ b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ c) $\dfrac{1}{x+7}$ d) $\dfrac{x}{1-x^2}$ e) $\dfrac{1-x}{1+x}$

Hinweis: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 38 (12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 18.01.15 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Graphs of sine and cosine*,
- *Manipulating trig expressions with pythagorean identities*,
- *Infinite geometric series* und
- *Understanding series*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweise: (i) Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2). (ii) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.