Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 05.12.2014)

Aufgabe 39 (5 Zusatzpunkte)

Sei $x > 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis darf keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{x^\nu}{x^{n-\mu+1} - 1} \,.$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie in Aufgabe 21.

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?
Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung.

Aufgabe 41 (20 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ c) $\dfrac{e^{-x^2}}{1 - x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihen von

d) e^{-x} um $x_0 = -\pi$ und e) $\sin x$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(3x) - 1)^3}{(\sin x - x)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\, \log(\log x)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{2014}(x)}{x^{2000}(\cos x - 1)^7}$

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x|x| - 3 + x - x^2}{|x - 1|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 44 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 19.01.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skill*

- *Creating power series from geometric series using algebra*
- *Maclaurin series for* $\sin x$, $\cos x$, *and* e^x

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2). (ii) Die Taylor-Reihe um Null heißt auch Maclaurin-Reihe.