Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 12.12.2014)

Aufgabe 45 (10 Punkte)

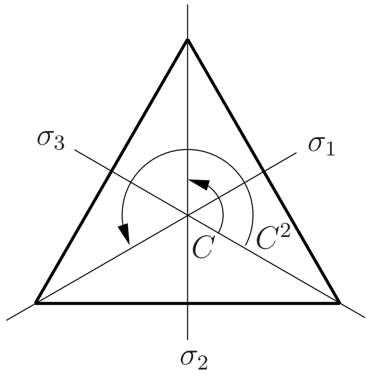
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) \;=\; \frac{\cos(ax)\,\mathrm{e}^{x^2}}{1+bx^4}$$

bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Belegen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Ist die Gruppe abelsch?



Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, in dem wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie: Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : [0,1] \to [0,1]$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \;\forall\; x \in [0,1]$) eine Gruppe. Ist diese Gruppe abelsch?

b) Wir betrachten $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$, aber modulo N, d.h. wir identifizieren N mit 0, $N+1$ mit 1 und so weiter.
Zeigen Sie: (i) $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ist kein Körper.
(ii) Ist N keine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_N, +, \cdot)$ kein Körper.

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Hinweis: Nehmen Sie in Teil b an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 50 (9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 18.01.15 auf `www.khanacademy.org` die *Skill*

- *Graphically adding and subtracting vectors*,
- *Constructing consistent and inconsistent systems* und
- *Systems of equations word problems*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweise: (i) Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).