Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 19.12.2014)

Aufgabe 51 [1] (10 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 52 [1] (10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 17 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\mathrm{CO_2} + x_2\mathrm{H_2} \longrightarrow x_3\mathrm{CH_4} + x_4\mathrm{H_2O}$$

$$y_1\mathrm{H(CH_2)}_n\mathrm{CH_2OH} + y_2\mathrm{O_2} \longrightarrow y_3\mathrm{CO_2} + y_4\mathrm{H_2O}$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

---

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?[2] Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $M = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = -x_1\,,\ 2x_1 + x_3 = 3x_2 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 3 und einer Nullstelle bei Eins $\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 3 und Steigung Eins im Ursprung $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennt man $\operatorname{Re} z = x$ den *Realteil* und $\operatorname{Im} z = y$ den *Imaginärteil* von z.

a) Überzeugen Sie sich, dass $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie, ob die Mengen

$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$ und $U_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} w = z\}$

Unterräume von $\mathbb{C}$ sind. Geben Sie ggf. jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Überzeugen Sie sich, dass auch $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $L(z) = (1 + \mathrm{i}) \cdot \operatorname{Re} z$ linear ist. Untersuchen Sie, ob die Mengen

$U_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid L(z) = 0\}$ und $U_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in \mathbb{C} \text{ mit } L(w) = z\}$

Unterräume von $\mathbb{C}$ sind. Geben Sie ggf. jeweils die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2$ d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2b_2 - a_1b_1$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

[2] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M \ \forall\ \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)