

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 19.12.2014)

---

### Aufgabe 51<sup>1</sup>

(10 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 52<sup>1</sup>

(10 Zusatzpunkte)

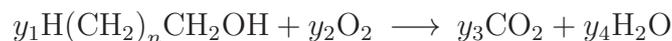
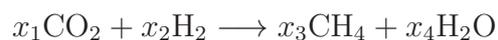
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$	b) $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0$	c) $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 17$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$	$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$	$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -3$
$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 5$	$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 0$	$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -1$

### Aufgabe 53

(10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges  $n \in \mathbb{N}_0$ ) ein lineares Gleichungssystem für die Werte  $x_i$  bzw.  $y_j$  aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle  $x_i$  bzw.  $y_j$  positive ganze Zahlen sind.

---

<sup>1</sup>Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

**Aufgabe 54**

(10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen  $M$  sind Vektorräume über  $K$ ?<sup>2</sup> Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a)  $M = \mathbb{C}^3, K = \mathbb{R}$                       b)  $M = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{C}$                       c)  $M = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R},$

d)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -x_1, 2x_1 + x_3 = 3x_2 \right\}, \quad K = \mathbb{R}$

e)  $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 3 \text{ und einer Nullstelle bei Eins} \}, K = \mathbb{R}$

f)  $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 3 \text{ und Steigung Eins im Ursprung} \}, K = \mathbb{R}$

**Aufgabe 55**

(10 Punkte)

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  als Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  nennt man  $\operatorname{Re} z = x$  den *Realteil* und  $\operatorname{Im} z = y$  den *Imaginärteil* von  $z$ .

- a) Überzeugen Sie sich, dass  $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie, ob die Mengen

$$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} w = z\}$$

Unterräume von  $\mathbb{C}$  sind. Geben Sie ggf. jeweils die Dimension und eine Basis an.

- b) Überzeugen Sie sich, dass auch  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $L(z) = (1 + i) \cdot \operatorname{Re} z$  linear ist. Untersuchen Sie, ob die Mengen

$$U_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid L(z) = 0\} \quad \text{und} \quad U_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in \mathbb{C} \text{ mit } L(w) = z\}$$

Unterräume von  $\mathbb{C}$  sind. Geben Sie ggf. jeweils die Dimension und eine Basis an.

**Aufgabe 56**

(10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jeweils ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert wird.

a)  $V = \mathbb{R}^n, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j$                       b)  $V = \mathbb{R}^3, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + a_3 b_3$

c)  $V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + a_2 b_2$                       d)  $V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2 b_2 - a_1 b_1$

e)  $V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

HINWEIS: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$  mit  $\mu_{kj} = \mu_{jk}$ .

---

<sup>2</sup>Überlegen Sie nur, ob aus  $\vec{x}, \vec{y} \in M$  folgt, dass auch  $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in M \forall \lambda, \mu \in K$ . Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)