

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Keine Abgabe. Besprechung auszugsweise in der Vorlesung.)

Aufgabe 57

Seien U und V Unterräume des \mathbb{R}^{10} mit $\dim U = 5$ und $\dim V = 6$ sowie Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_6$ von V . Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_6)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter \vec{a}_j und \vec{b}_j)!

Aufgabe 58

$V := \operatorname{span}(1, \sin(x), \cos(x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 49). Sei $L : V \rightarrow V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{g \in V \mid \exists f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 59

Wir betrachten den Vektorraum $C([-1, 1])$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ (vgl. Aufgaben 49 & 58). Sei $f_n(x) = x^n$. Offensichtlich gilt $f_n \in C([-1, 1]) \forall n \in \mathbb{N}_0$. Auf $C([-1, 1])$ sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, mit

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1 + (-1)^{n+m}}{n + m + 1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

a) Berechnen Sie $\langle f_3 - f_1, 2f_2 + 5f_0 \rangle$.

Sei $U := \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

c) Bestimmen Sie $\dim U$.

d) Sei $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ die Basis aus Teil b. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen P_0, P_1, P_2 und P_3 auf dem Intervall $[-1, 1]$.

e) Sei $g(x) = (x - 1)^2$. Drücken Sie g als Linearkombination der P_j aus.

Aufgabe 60

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 61

Sei

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1 - \cos x}{x},$$

stetig fortgesetzt wo nötig.

- a) Berechnen Sie die Taylorreihe von f um Null.
- b) Bestimmen Sie die 2015. Ableitung von g an der Stelle $x = 0$.
HINWEIS: Die Taylorreihe um Null ist hilfreich.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!