Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 16.01.2015)

Aufgabe 62 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 56e. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 63 (10 Punkte)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$3 + 2x_1 + 6x_2 = x_3\,.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1.

Aufgabe 64 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

a) $(4, 3)$ b) $(3, -4)$ c) $(-1, 2)$ d) $(-1, -1)$

Geben Sie die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(1, 0, 0)$ f) $(0, 2, 0)$ g) $(3, 0, 3)$ h) $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

Aufgabe 65 (10 Punkte)

Zeichnen Sie die folgende Kurve und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ sowie deren Betrag $|\dot{\vec{x}}|$,

$$\vec{x}(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{x}}(0)$, $\dot{\vec{x}}(\frac{\pi}{2})$, und $\dot{\vec{x}}(\frac{3\pi}{2})$ als Tangentialvektoren ein.

Aufgabe 66 [1] (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
e) $B^T AA^T$, f) A^2, g) $A^T AA^T A$.

HINWEIS: Assoziativität ist hilfreich.

Aufgabe 67 (9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 08.02.15 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Defined and undefined matrix operations*,
- *Multiplying a matrix by a vector* und
- *Multiplying a matrix by a matrix*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.