

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 15 (Abgabe am 06.02.2015)

---

### Aufgabe 80

(10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\text{a) } \int \cos^2 x \, dx \quad \text{b) } \int \cos^3 x \, dx \quad \text{c) } \int x \cos(x^2) \, dx \quad \text{d) } \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

### Aufgabe 81

(10 Punkte)

Zeichnen und berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion  $f : x \mapsto x^2 - 1$ , der Tangente an den Graphen an der Stelle  $x = 2$  sowie der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.

### Aufgabe 82

(10 Punkte)

Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt$$

ist für alle  $s \in \mathbb{R}^+$  wohldefiniert. (Warum?)

- Berechnen Sie  $\Gamma(1)$ .
- Zeigen Sie:  $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \forall s > 0$ . HINWEIS: Partielle Integration.
- Bestimmen Sie  $\Gamma(15)$ .

### Aufgabe 83

(10 Zusatzpunkte)

Finden Sie Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  mit  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \psi(y) = 0$  so, dass

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{\phi(y)} \frac{dx}{x} + \int_{\psi(y)}^1 \frac{dx}{x} \right) = 2\pi.$$

### Aufgabe 84

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des  $\mathbb{R}^3$  und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie  $\vec{x}'$  für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\phi$  aus.