Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 14/15
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 18.02.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 111 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n > n^2 + 1 \quad \forall n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x - \cos(2x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(2x)}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^6 + 3x^2} - \sqrt{x^6 + 3x^3}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - \sin x)^3}{(1 - \mathrm{e}^x)^9}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} x \log(\sin^2 x)$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-n}$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{8} \binom{9}{\nu} (-1)^\nu$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{15} \sum_{n=\nu}^{15} \binom{n}{\nu} 2^\nu (-1)^{n-\nu}$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{9 - x^2}$ b) $\dfrac{1-x}{1+x}$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihe von

d) $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ um $x_0 = 2$,

und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (1+3+2+4+3+4+4 = 21 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x|x| - 3 + x - x^2}{x - 1}\,.$$

a) Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6 (4+2+2+6+6 = 20 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \ldots, 4$, bilden die Spalten der Matrix A.

a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Berechnen Sie A^{-1}.
e) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, und sei $\det A \neq 0$. Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für die gilt

$$AXA^{-1} + AB = CA^{-1}\,.$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sei $f_n(x) = 2^{nx}$. Zeigen Sie: f_0, f_1 und f_{-1} sind linear unabhängig in $C([-1,1])$, dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$.