Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 14/15

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 01.04.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$n! > 2^n \quad \forall\, n \geq 4\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{2n-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4-2x^2}-\sqrt{x^2+x^4}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^3}{(\sin x - x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2x)}{x}$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum\limits_{k=3}^{11} 2^{k-1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{9} \dbinom{9}{n} (-1)^n$ c) $\sum\limits_{\mu=0}^{14} \sum\limits_{\nu=\mu}^{14} \dbinom{\nu}{\mu}\, 2^{-\nu}$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{\pi^2-x^2}$ b) $x\,\mathrm{e}^{5-x}$ c) $\dfrac{\sin x}{1-x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihe von

d) $\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ um $x_0 = -2$,

und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (1+3+3+4+2+4+4 = 21 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 3 + x - x|x|}{x-1}.$$

a) Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich von f.
b) Berechnen Sie alle Nullstellen.
c) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6 (4+2+2+6+2+6 = 22 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \ldots, 4$, bilden die Spalten der Matrix A.

a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Berechnen Sie A^{-1}.
e) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A^{-1}\vec{x} = \vec{a}_5$.
f) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 7 (3+4 = 7 Punkte)

Sei $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

a) Bestimmen Sie a_1 und a_2.
b) Die Folge (a_n) konvergiert (ohne Beweis).
Bestimmen Sie ihren Grenzwert $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $\operatorname{tr} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\operatorname{tr}(A) = a + d$.

Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei weiter $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(AB^T)$.

Zeigen Sie: (i) $\langle A, A\rangle \geq 0 \ \ \forall\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie (ii) $\langle A, A\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.