Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
13. Oktober 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Eine stetige Funktion?

An welchen Punkten ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 2: Stetigkeit und offene Mengen

(a) Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn das Urbild $f^{-1}(O) \subset X$ jeder offenen Menge $O \subset Y$ wieder offen ist.

(b) Wir sagen eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls für jede offene Menge $O \subset X$ auch $f(O) \subset Y$ offen ist. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass aus f stetig nicht folgt, dass f offen ist.

Aufgabe 3: Kontraktionen sind stetig

Eine Abbildung $f : X \to X$ auf einem metrischen Raum (X,d) heißt Kontraktion, falls ein $0 < \theta < 1$ existiert so, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta\, d(x,y)\,.$$

Zeigen Sie, dass jede Kontraktion stetig ist.

Aufgabe 4: Punktweise Konvergenz stetiger Funktionen

Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert so, dass f nicht stetig ist.

Aufgabe 5: Der Abstand zu einer Menge

Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $T \subset X$ definieren wir die Abbildung

$$d_T : X \to \mathbb{R}, \quad d_T(x) := \inf\{d(x,y) \,|\, y \in T\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{T} = \{x \,|\, d_T(x) = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass d_T stetig ist.