Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
15. Dezember 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 10

Aufgabe 46: Die Dyson-Reihe

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to M(n \times n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) \tag{1}$$

und machen den Ansatz

$$x(t) = \left(E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} \mathrm{d}\tau_j\, A(\tau_1) \cdots A(\tau_j) \right) x_0.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass x die Differentialgleichung (1) zumindest formal löst.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in der Definition von $x(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in I$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und, dass x tatsächlich die Differentialgleichung (1) löst.

Aufgabe 47: Die Legendre-Differentialgleichung

Betrachten Sie die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - t^2)\, \ddot{x}(t) - 2t\, \dot{x}(t) + n(n+1)\, x(t) = 0$$

auf dem Intervall $I = (-1, 1)$.

(a) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung mittels Potenzreihenansatz

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,j}\, t^j.$$

Hinweis: Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $c_{n,j}$. Wählen Sie die Startwerte $c_{n,0}$ und $c_{n,1}$ so, dass die Rekursion abbricht.

(b) Bestimmen Sie x_n für $n = 0, 1, 2, 3$. Bestimmen Sie anschließend Konstanten α_n, sodass $P_n(t) := \alpha_n\, x_n(t)$ die Normierungsbedingung $P_n(1) = 1$ erfüllt. Überprüfen Sie, ob die so erhaltenen Polynome P_n mit den in der Vorlesung definierten Legendrepolynomen übereinstimmen.

Aufgabe 48: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

(a) Betrachten Sie eine allgemeine homogene lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$\sum_{j=0}^{m} a_j\, x^{(j)}(t) = 0, \quad \text{mit} \quad a_m = 1. \tag{2}$$

Wir definieren das zugehörige charakteristische Polynom durch $p(\lambda) := \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j$. Sei nun λ_0 eine ℓ-fache Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass für $k = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ die Funktionen

$$x_k(t) = t^k\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

linear unahbängige Lösungen von (2) sind.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass (2) in der Form

$$Q(D)\,(D - \lambda_0)^{\ell} x(t) = 0$$

mit $D := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und einem geeigneten Polynom Q geschrieben werden kann.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(4)}(t) - 2\ddot{x}(t) + x(t) = \mathrm{e}^t.$$

Hinweis: Machen Sie für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz $q(t)\mathrm{e}^t$ mit einem Polynom q. Welchen Grad muss q mindestens haben?

Aufgabe 49: Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Holomorphie:

(a) $f(z) = z^n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$

(b) $g(z) = \sin(z)$

(c) $h(z) = |z|^2$

(d) $k(z) = \bar{z}$

(e) $l(z) = \mathrm{Re}(z)$

(f) $n(z) = \ln z$

Schöne Feiertage !