

## MATHEMATIK FÜR PHYSIKER III

### Übungsblatt 11

#### Aufgabe 50: Weglänge

Die Länge eines Weges  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt.$$

Zeigen Sie, dass  $L$  invariant unter Reparametrisierung ist.

#### Aufgabe 51: Geschlossene Wegintegrale nichtholomorpher Funktionen

Berechnen Sie die folgenden Integrale entlang der beschriebenen geschlossenen Wege:

- (a)  $f(z) = |z|^2$  entlang des Weges, der durch die Strecke von  $-1$  nach  $1$  und den oberen Einheitshalbkreis gegeben ist.
- (b)  $g(z) = \bar{z}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  entlang des positiv orientierten Einheitskreises.
- (c)  $h(z) = \operatorname{Im}(z)$  entlang des Randes des Quadrats, das durch die Eckpunkte  $-1 - i$ ,  $1 - i$ ,  $1 + i$  und  $-1 + i$  festgelegt wird.

#### Aufgabe 52: Wegintegral einer holomorphen Funktion

Integrieren Sie die Funktion  $e^z$  einmal entlang der reellen Achse von  $-1$  nach  $1$  und einmal entlang des oberen Einheitshalbkreises wiederum von  $-1$  nach  $1$ .

#### Aufgabe 53:

Sei  $\gamma_R$  der Viertelkreis von  $R$  nach  $iR$ ,  $0 < R \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

#### Aufgabe 54:

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeigen Sie: Wenn  $f$  nur reelle Werte annimmt, so ist  $f$  konstant.

#### Aufgabe 55: Vorbereitung zum Riemannschem Hebbbarkeitssatz

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $f$  eingeschränkt auf  $D \setminus \{a\}$  holomorph. Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $D$  lokal integabel ist.