Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
19. Januar 2015

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 12

Aufgabe 56: Umlaufzahl

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ einfach zusammenhängend ist.

(b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg. Zeigen Sie: γ ist homotop zu einem C^1-Weg, dessen Spur Teilmenge der Kreislinie ∂K ist, genauer zu einem Weg μ der Form $\mu(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\varphi(t)}$, sodass $\varphi \in C^1([0,1], \mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie weiter, dass ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass μ (und damit auch γ) homotop zu dem Weg $\nu : [0,1] \to \partial K$, $t \mapsto \nu(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n t}$ ist.

(d) Sei nun $w \in \mathbb{C}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{w\}$ ein stetig differenzierbarer, geschlossener Weg und

$$I(w,\gamma) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \mathrm{d}z.$$

Zeigen Sie, dass $I(w,\gamma) \in \mathbb{Z}$.

(e) Zeigen Sie schließlich, dass $I(w,\gamma)$ lokal konstant ist, d.h. für alle $w \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Spur}(\gamma)$ existiert eine Umgebung U von w, sodass $I(v,\gamma) = I(w,\gamma)$ für alle $v \in U$.

Aufgabe 57: Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus

Auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- := \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \,|\, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ ist $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph. Man definiert den Hauptzweig des komplexen Logarithmus $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ als Stammfunktion von f eingeschränkt auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ mit der Bedingung $\ln(1) = 0$.

(a) Geben Sie $\ln(z(r,\varphi))$ für $z(r,\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ explizit an.

(b) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ gilt $\mathrm{e}^{\ln(z)} = z$.

(c) Kann man ln auf ganz $\mathbb{C}^*$ stetig fortsetzen?

Aufgabe 58: Cauchy Integralformel

Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchy Integralformel folgende Integrale:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2}, \qquad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}z, \qquad \int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + \pi^2} \,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 59: Das Haus vom Nikolaus

Es seien durch $a = -1 - \mathrm{i}$, $b = -1 + 2\mathrm{i}$, $c = 3\mathrm{i}$, $d = 1 + 2\mathrm{i}$ und $e = 1 - \mathrm{i}$ fünf Punkte in der komplexen Zahlenebene definiert. Zeichnen Sie ohne abzusetzen eine beliebige Version des "Haus vom Nikolaus" durch diese fünf Punkte und geben Sie die Reihenfolge an, in der diese Punkte in Ihrer Version durchlaufen werden. Dadurch erhalten Sie einen stückweise glatten Weg γ. Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z$$

für den von Ihnen gewählten Weg, ohne das Integral explizit zu berechnen.

Aufgabe 60: Polynomiales Wachstum

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $r, c > 0$. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, für die gelte

$$|f(z)| \leq c|z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $m \leq n$ ist.