Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
26. Januar 2015

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 13

Aufgabe 61: Fresnel Integrale

Berechnen Sie die Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrieren Sie dazu die Funktion e^{-z^2} entlang des Randes des Kreissegments $\varphi \in [0, \pi/4]$ mit Radius R. Betrachten Sie dann den Limes $R \to \infty$.

Aufgabe 62: Konvergenzradien

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{z^{3n}}{2^n}\,, \qquad \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{3n^2+n}{2n^2+1}\right)^{n/2} z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{100^n} z^n\,.$$

Aufgabe 63: Der Satz von Casorati-Weierstraß

Zeigen Sie: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Dann ist $f(U \cap (D \setminus \{z_0\}))$ dicht in $\mathbb{C}$ für jede Umgebung U von z_0.

Aufgabe 64: Konvergenzradien einer Laurentreihe

Bestimmen Sie den größten offenen Kreisring, auf dem die Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(1+z)^n}{a^n+1} \qquad \text{mit } a \geq 1$$

konvergiert.

Aufgabe 65: Taylor- und Laurentreihe

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, 2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z-2)}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um 0. Wo konvergiert diese?

(b) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f auf dem Kreisring $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$.

(c) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f auf dem Kreisring $\mathbb{C} \setminus \overline{B_2(0)}$.

Aufgabe 66: Das Residuum

Die Funktion f habe bei z_0 einen Pol k-ter Ordnung. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\right|_{z=z_0} \frac{(z-z_0)^k f(z)}{(k-1)!}.$$

Hinweis: Das Residuum von f an der Stelle z_0 ist der Koeffizient c_{-1} der Laurententwicklung.