Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
2. Februar 2015

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 14

Aufgabe 67: Residuenkalkül

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit dem Residuenkalkül:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+4\cos t}{5+4\sin t}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 68: Residuen berechnen

(a) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$ eine k-fache Nullstelle. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von z_0 gibt und eine auf U holomorphe Funktion G, sodass auf U gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-z_0} + G(z)\,.$$

(b) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und habe bei $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung k. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von z_0 gibt und eine auf U holomorphe Funktion H, sodass auf U gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-z_0} + H(z)\,.$$

(c) Was ist also jeweils das Residuum er Funktion f'/f am Punkt z_0?

Aufgabe 69: Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral

Zeigen Sie folgenden Satz: Sei f meromorph in einem Gebiet D, $\gamma : I \to D$ eine geschlossene stückweise differenzierbare Kurve, die eine Teilmenge $A \subset D$ berandet, d.h die Umlaufzahl von γ ist 1 auf A und 0 auf $G \setminus \bar{A}$.

Sei N_A die Anzahl der Nullstellen und P_A die Anzahl der Polstellen von f in A gezählt mit ihrer Vielfachheit bzw. Ordnung, wobei f weder Nullstellen noch Pole auf γ habe. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N_A - P_A.$$

Aufgabe 70: Satz von Rouché

Zeigen Sie folgenden Satz: Sei A, D und γ wie in der vorherigen Aufgabe und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|g(z)| < |f(z)|$ für alle z auf γ. Dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen in A.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 69.