Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
9. Februar 2015

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 15

Aufgabe 71: Elementare Eigenschaften von σ-Algebren

Folgern Sie direkt aus der Definition die folgenden Aussagen für eine beliebige σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf der Menge X.

a) $X \in \mathcal{A}$.

b) Seien $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

c) Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ und $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 72: Elementare Eigenschaften von Maßen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Dann ist $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, d.h. insbesondere $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) Seien $A, B \in \mathcal{A}$, dann gilt $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

c) Seien $A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

d) Seien $A_k \in \mathcal{A}$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

e) Seien $A_k \in \mathcal{A}$ mit $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$. Zeigen Sie

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Aufgabe 73: Maße auf abzählbaren Mengen

Sei X eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf der Potenzmenge diskret ist, d.h. es gibt eine Funktion $\phi : X \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \phi(x)$$

für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ ist.

Aufgabe 74: Würfeln

Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der möglichen Ergebnisse bei einem Würfelwurf.

a) Geben Sie vier verschiedene σ-Algebren auf X an.

b) Geben Sie für jede der σ-Algebren aus a) ein möglichst kleines Erzeugendensystem an.

c) Geben Sie auf jeder der σ-Algebren aus a) ein Maß an.

Aufgabe 75: Äußeres Lebesgue-Maß

Sei $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das äußere Lebesgue-Maß. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) Durch λ^* wird ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert.

b) $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

c) $\lambda^*(I) = b - a$ für das abgeschlossene Intervall $I = [a, b]$, $a < b$.

d) $\lambda^*(I) = b - a$ für das offene Intervall $I = (a, b)$, $a < b$.

e) $\lambda^*(C) = 0$ für die Cantor-Menge $C \subset [0, 1]$. Dabei ist $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$. Die P_k erhält man induktiv durch folgende Konstruktion: P_1 erhält man aus dem Intervall $[0, 1]$ indem man das offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ wegnimmt, also $P_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. P_2 erhält man wiederum, indem man aus den zwei Intervallen in P_1 wieder jeweils die mittleren Drittel entfernt, also $P_2 = P_1 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ usw..

Aufgabe 76: Vervollständigung

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge messbar ist. Wir wollen zeigen, dass jeder Maßraum eine eindeutige Vervollständigung besitzt. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass durch

$$\hat{\mathcal{A}} = \{A \cup M \mid A, N \in \mathcal{A}, M \subset N \,\mathrm{mit}\, \mu(N) = 0\}$$

eine σ-Algebra definiert wird. Für $\hat{A} = A \cup M$ setzen wir nun $\hat{\mu}(\hat{A}) = \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ wohldefiniert ist und dass durch $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ ein vollständiger Maßraum gegeben ist.

Aufgabe 77: Lebesgue-Borel-Maß

Sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{L}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen mit dem Lebesgue-Maß λ.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass alle offenen Intervalle Lebesgue-messbar sind und folgern Sie daraus die Behauptung.

b) Bezeichnen Sie nun das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}$ mit $\lambda_{\mathcal{B}}$ und zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda_{\mathcal{B}})$ ist.

Schöne Ferien!