Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
20. Oktober 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Das Newton-Verfahren und der Banachsche Fixpunktsatz

In dieser Aufgabe sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\phi : I \to I$ Lipschitz-stetig.

(a) Unter welcher Bedingung an die Lipschitz-Konstante ist ϕ eine Kontraktion? Falls ϕ differenzierbar ist, welcher Bedingung an die Ableitung von ϕ entspricht das?

(b) Seien nun $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Funktionen. Machen Sie sich klar, dass

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \phi(x) := x + g(x)f(x)\,.$$

Es ist also ξ genau dann Nullstelle von f wenn ξ Fixpunkt von ϕ ist. Das Newton-Verfahren besteht nun darin, die Nullstellen von f durch Iterationsfolgen $x_{n+1} = \phi(x_n)$ zu approximieren. Dazu wählt man $g(x) = -1/f'(x)$, also

$$\phi_{\text{Newton}}(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

(c) Begründen Sie diese Wahl von g und interpretieren Sie sie geometrisch anhand einer Zeichnung.

(d) Formulieren Sie nun unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes und Teil (a) Bedingungen an f die sicherstellen, dass die Iterationsfolge $x_{n+1} = \phi_{\text{Newton}}(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen eine (die?) Nullstelle von f konvergiert.

(e) Kann man die in (d) formulierten Bedingungen durch Wahl eines hinreichend kleinen Intervalls I um eine Nullstelle von f immer sicherstellen?

(f) Geben Sie ein f an, sodass die zugehörigen Kontraktion ϕ_{Newton} den Fixpunkt $\xi = \sqrt{2}$ hat. Für welche Startwerte konvergiert die zugehörige Iterationsfolge gegen $\sqrt{2}$?

Aufgabe 7: Funktionenfolgen

Geben Sie Funktionenfolgen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit den jeweiligen Eigenschaften an.

(a) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das **nicht** stetig ist.

(b) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber **nicht** gleichmäßig gegen ein stetiges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(c) f_n ist stetig differenzierbar für alle n und die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das **nicht** differenzierbar ist.

Aufgabe 8: Separabilität

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Konstruieren Sie eine Folge, sodass jeder Punkt in X Häufungspunkt dieser Folge ist.
Bemerkung: Ein Raum X heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge T gibt, die dicht liegt. Dabei liegt T dicht in X, wenn für alle $\epsilon > 0$ und für alle $x \in X$ ein $a \in T$ existiert mit $d(a, x) < \epsilon$. Somit haben Sie gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist.

Aufgabe 9: Kompaktheit von Folgen

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und sei $M := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass M genau dann kompakt ist, wenn $a \in M$.