Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
27. Oktober 2014

# Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 3

### Aufgabe 10: Gebiete und Zusammenhang

(a) Zeigen Sie, dass die Gebiete in $\mathbb{R}$ genau die offenen Intervalle $(a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sind.

(b) Eine metrischer Raum $X$ heißt **zusammenhängend** (im Gegensatz zu wegzusammenhängend) , falls er *nicht* die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen ist, also nicht in der Form $X = X_1 \cup X_2$ geschrieben werden kann mit $X_1, X_2$ offen und nichtleer und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass jeder wegzusammenhängende metrische Raum auch zusammenhängend ist. Verwenden Sie dabei, dass das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

**Bemerkung:** Machen Sie sich klar, dass z.B. $[0, \frac{1}{2})$ als Teilmenge des metrischen Raums $[0, 1]$ offen ist! Das Problem sind also nicht die Randpunkte!

### Aufgabe 11: Partielle Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $g$ in $(0, 0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, wobei die partiellen Ableitungen nach $x$ und $y$ nicht vertauschen.

(b) Untersuchen Sie $\partial_x \partial_y g$ auf Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$.

(c) Sei $f$ wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $f$ überall partiell differenzierbar nach $x$ und $y$ ist, obwohl $f$ nicht stetig ist.

### Aufgabe 12: Greensche Funktionen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n > 2$ gegeben durch $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\alpha}$. Bestimmen Sie $\alpha$, sodass

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0.$$

**Bemerkung:** Die Lösung der Gleichung $\Delta f = \delta$ im $\mathbb{R}^n$ heißt Greensche Funtionktion des Laplaceoperators im $\mathbb{R}^n$. Hier ist $\delta$ die Delta-Distribution am Ursprung. Sie haben in der Aufgabe allerdings nur gezeigt, dass $f$ die Gleichung $\Delta f = 0$ außerhalb des Ursprungs erfüllt.

### Aufgabe 13: Der Levi-Civita-Tensor

Sei $(e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$. Der Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{ijk}$ in dieser Basis ist gegeben durch

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Machen Sie sich klar, dass gilt $\epsilon_{ijk} = (e_i \times e_j)_k$ und beweisen Sie damit die Identität

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Zeigen Sie weiter die Identität $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

### Aufgabe 14: Identitäten für Gradient, Rotation und Divergenz

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der vorherigen Aufgabe:

(a) Für $f \in C^2(G)$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$.

(b) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} g = 0$.

(c) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{rot} g = \operatorname{grad}\operatorname{div} g - \Delta g$.

### Aufgabe 15: Laplace rotationssymmetrischer Funktionen

Sei $f \in C^2(G)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ rotationssymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, sodass $f = h \circ r$ in $G$ mit $r(x) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\Delta f$ rotationssymmetrisch ist.