Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
3. November 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 4

Aufgabe 16: Differenzierbarkeit?

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

(b) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.

(c) Die partiellen Ableitungen von g sind stetig in $(0,0)$.

(d) g ist in $(0,0)$ total differenzierbar.

(e) Alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren, d.h. für jeden Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ existiert der Limes
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(hv_1, hv_2) - g(0,0)}{h} .$$

Aufgabe 17: Total aber nicht stetig partiell differenzierbare Funktion

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen dort nicht stetig sind.

Aufgabe 18: Laplace in Polarkoordinaten

Sei $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) =: (x(r,\varphi), y(r,\varphi))$$

und $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta u) \circ f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\,(u\circ f)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\,(u\circ f)}{\partial\,\varphi^2}.$$

Aufgabe 19: Divergenz in Kugelkoordinaten

Sei $X = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^3$ und sei $f : X \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta) =: (x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta)).$$

Sei weiter $Y = f(X)$ und

$$g : Y \to X\,, \quad (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) =: (r(x,y,z), \varphi(x,y,z), \theta(x,y,z))$$

die Inverse von f, d.h. $f \circ g : Y \to Y$ ist die Identität.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Jacobi-Matrix von f und g.

(b) Bestimmen Sie analog zur Vorlesung und zu Aufgabe 18 die Divergenz in Kugelkoordinaten, d.h. schreiben Sie für ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

die Abbildung $(\operatorname{div} v) \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als Funktion der partiellen Ableitung von $v \circ f$.

(c) Bestimmen Sie nun die Matrix für den Basiswechsel auf die den Koordinaten angepasste Basis $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$, welche durch Normierung der Basis $(\operatorname{grad} r, \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \theta)$ entsteht.

(d) Stellen Sie schließlich das Vektorfeld $v \circ f$ bezüglich der durch die Kugelkoordinaten definierten Basis $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$ dar, also in der Form

$$(v \circ f) = (v \circ f)_r\, e_r + (v \circ f)_\varphi\, e_\varphi + (v \circ f)_\theta\, e_\theta$$

und schreiben Sie $(\operatorname{div} v) \circ f$ als Funktion der partiellen Ableitung von $(v \circ f)_r$, $(v \circ f)_\varphi$ und $(v \circ f)_\theta$.