Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
10. November 2014

# Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 5

**Aufgabe 20: Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) = c$. Die Niveaufläche von $f$ zur Höhe $c$ ist definiert durch

$$N_f(c) := \{y \in U \mid f(y) = c\}.$$

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_f(c)$ mit $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$. Zeigen Sie, dass

$$\langle D\alpha(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle = 0,$$

also, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht.

**Aufgabe 21: Taylorpolynome**

Bestimmen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung um den jeweils angegebenen Punkt:

(a) $f(x, y) = \exp^{-x^2+y}$ um den Punkt $(0, 0)$.

(b) $g(x, y) = 4x^2 \log(1 + x + y) - y^2$ um $(0, 0)$.

(c) $h(x, y, z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + y + 2xz + 3z - 4$ um $(1, 3, -1)$.

**Aufgabe 22: Lokale Extrema**

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp^{-x^2-4y^2} .$$

**Aufgabe 23: Mittelpunkt**

Im $\mathbb{R}^n$ seien $k$ Punkte $a_1, \dots, a_k$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} |x - a_j|^2,$$

ein Minimum im "Mittelpunkt" $\xi := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ besitzt.

**Aufgabe 24: Rechnen ohne Taschenrechner**

Berechnen Sie nur mit Stift und Papier näherungsweise $1{,}05^{1{,}02}$ mit einem Fehler $< 10^{-4}$.
**Hinweis**: Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = x^y$ um den Punkt $(1, 1)$.

**Aufgabe 25: Taylorreihe**

Bestimmen Sie bis hin zu beliebiger Ordnung $n$ das Taylorpolynom $P^{(n)}_{f,(0,0)}$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}.$$

Für welche Werte von $(x, y)$ konvergiert die Taylorreihe?