Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
17. November 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 6

Aufgabe 26: Lokales Auflösen und der Satz über implizite Funktionen

Sei $F(x,y) = y^3 + y - x^4 + x^2$. Zeigen Sie, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine eindeutige Abbildung $g : U \to V$ existieren, sodass $F(x, g(x)) = 0$.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P^{(2)}_{g,0}$ zweiter Ordnung von g in 0.

Aufgabe 27: Höhenlinien

Diskutieren Sie die Höhenlinien der Funktion $F : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x-y}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Nullstellen von $\partial_y F$ bzw. $\partial_x F$.
- Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von F.
- Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Höhenlinien von F.
- In welchen Rechtecken $I \times J \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$ lassen sich die Mengen

  $$\{(x,y) \in I \times J \mid F(x,y) = c\}$$

  in der Form

  $$\{(x,y) \in I \times J \mid y = \phi(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,y) \in I \times J \mid x = \psi(y)\}$$

  mit differenzierbaren Funktionen $\phi : I \to J$ bzw. $\psi : J \to I$ darstellen?

Aufgabe 28: Lokale und globale Invertierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt lokal invertierbar ist. Ist f global invertierbar?

Aufgabe 29: Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - y^3$ unter der Nebenbedingung $h(x,y) = 0$ mit $h(x,y) = x^2 + 2y^2 - 9$.

Aufgabe 30: Extrema unter Nebenbedingungen

Man bestimme den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$E_{a,b,c} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

einbeschrieben ist.

Aufgabe 31: Maximale Entropie bei fester Energie: die kanonische Verteilung

Ein physikalisches System erlaube N verschiedene Zustände, wobei der j-te Zustand Energie E_j habe und $E_1 < E_2 < \ldots < E_N$ gelte. Ein statistischer Zustand p des Systems ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum der Zustände, d.h. ein Punkt $p \in [0,1]^N$ mit $\sum_{j=1}^N p_j = 1$. Hier ist p_j die Wahrscheinlichkeit, dass der j-te Zustand realisiert ist. Die Entropie einer solchen Verteilung ist durch die Funktion

$$S : [0,1]^N \to \mathbb{R}, \quad S(p) = -\sum_{j=1}^N p_j \log p_j$$

definiert. Wir möchten diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung p, finden, welche die Entropie bei gegebener Gesamtenergie U mit $E_1 \leq U \leq \langle E \rangle$ maximiert, wobei $\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_j$ ist. D.h., wir möchten S unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^N p_j E_j - U = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^N p_j - 1 = 0$$

maximieren. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Nennen Sie den Lagrangemultiplikator für die erste Nebenbedingung $-\beta$ und für die zweite $1-\lambda$. Zeigen Sie, dass für jedes Maximum $p \in [0,1]^N$ von S unter den obigen Nebenbedingungen gelten muss $p_j = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{e}^{-\beta E_j}$, wobei $Z(\beta) = \sum_{j=1}^N \mathrm{e}^{-\beta E_j}$ die Zustandssumme bezeichnet und $U(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta)$ ist.

(b) Machen Sie sich klar, dass die Abbildung $U : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\beta \mapsto U(\beta)$ streng monoton fallend ist und somit auf ihrem Bild invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass das Bild genau das Intervall $(E_1, \langle E \rangle]$ ist. Überlegen Sie sich dazu auch, wie $p(\beta)$ für $\beta = 0$ und $\beta \to \infty$ aussieht. Physikalisch spielt $\beta > 0$ die Rolle der inversen Temperatur, d.h. $\beta = T^{-1}$.

(Sie können die folgenden Teilaufgaben auch bearbeiten, wenn Sie Teil (b) nicht selbst zeigen können)

(c) Mit Teil (a) und (b) haben wir nun zu jeder Energie $U \in (E_1, \langle E \rangle]$ einen eindeutigen Kandidaten $p(\beta)$, nämlich $p_j(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{e}^{-\beta E_j}$ mit $\beta = \beta(U)$, gefunden. Zeigen Sie, dass für jedes $\beta \geq 0$ diese Verteilung $p(\beta)$ ein lokales Maximum von S unter den obigen Nebenbedingungen ist.

(d) Zeigen Sie, dass es sich bei der kanonischen Verteilung $p(\beta)$ tatsächlich um das eindeutige globale Maximum von S unter den obigen Nebenbedingungen handelt.

(e) Betrachten Sie nun den Spezialfall $E_j = j$, was einem quantenmechanischen harmonischen Oszillator entspricht. Berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme $Z(\beta)$ und die Funktion $U(\beta)$ explizit. Wie lautet der Zusammenhang zwischen U und β im Grenzfall $N \to \infty$?