Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
24. November 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 7

Aufgabe 32: Kettenlinie

Betrachten Sie eine Kette der Länge $l > 2$. Die Kette ist aufgehängt an den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Dazwischen wird ihre Lage durch den Graph einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschrieben. Die Funktion f ist dadurch bestimmt, dass sie die Energie

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

minimiert.

(a) Überlegen Sie sich, dass die Länge der Kurve durch

$$L(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

gegeben ist. Welcher Nebenbedingung muss die Funktion f also gehorchen?

(b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion f her, die jeder kritische Punkt von E unter der obigen Nebenbedingungen erfüllen muß.

(c) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

die Differentialgleichung für geeignete Wahl von c löst. Zeigen Sie weiterhin, dass a und c durch Vorgabe von $l > 2$ eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 33: Balkenbiegung

Wir betrachten einen Balken, der an den beiden Punkten $(0, 0)$ und $(1, a)$ eingespannt ist, beschrieben durch eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Die Biegeenergie ist für kleine Krümmungen näherungsweise gegeben durch

$$E(f) = \int_{0}^{1} (f''(x))^2 \mathrm{d}x.$$

Ferner seien die Randbedingung $f'(0) = 0$ und $f'(1) = b$ vorgegeben. Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$ welche E unter obigen Nebenbedingungen minimiert und skizzieren Sie die verschiedenen möglichen Formen des Balken.
Achtung: Die obigen Daten legen die Länge des Balkens eindeutig fest, sie kann also nicht zusätzlich vorgegeben werden! Berechnen Sie näherungsweise die Länge das Balkens als Funktion von a und b für den Fall $a, b \ll 1$.

Aufgabe 34: Einfache Vektorfelder

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $v(x) = x$. Bestimmen Sie den zugehörigen Fluß φ^t.

(b) Gegeben sei der Fluß $\varphi^t(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $\varphi^t(x) = D(t)x$ mit

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld.

Aufgabe 35: Das ebene Pendel

Das ebene Pendel wird durch die folgende Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Funktion der Zeit beschrieben:

$$\ddot{\alpha}(t) = -\sin \alpha(t)\,.$$

Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Integralkurven. Interpretieren Sie die verschiedenen Typen von Integralkurven und besondere Punkte des Vektorfeldes.

Aufgabe 36: Der Konfigurationsraum

Von A nach B führen zwei Wege. Zwei Lastwagen, die durch ein Seil der Länge l verbunden sind, können so auf den beiden Wegen gleichzeitig von A nach B fahren, dass das Seil nicht reißt.

Nun werden die Seile entfernt und es starte auf den beiden Wegen je ein Lastwagen von A in Richtung B und von B in Richtung A. Beide sind jeweils mit einem Mühlstein vom Durchmesser $d > l$ beladen, dessen Mittelpunkt genau in dem Punkt liegt, in dem das Seil befestigt war. Entscheiden Sie anhand einer Skizze im zugehörigen Konfigurationsraum, ob es eine Möglichkeit gibt, dass beide Lastwagen ihr Ziel erreichen, ohne die Mühlsteine zu verschieben.