Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
1. Dezember 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 8

Aufgabe 37: Maximales dynamisches System

Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $v(x) = \mathrm{e}^x$. Bestimmen Sie das zugehörige dynamische System $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ für maximal mögliches $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 38: Lipschitz-Stetigkeit

a) Sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass v lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Sei nun $v : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $v|_K : K \to \mathbb{R}^n$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 39: Taylorentwicklung der Lösung

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = tx(t), \quad x(0) = 1,$$

indem Sie die Taylorreihe der Lösung $x(t)$ am Punkt $t = 0$ bestimmen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Differentialgleichung mit der Methode der getrennten Veränderlichen lösen.

Aufgabe 40: Eindeutigkeit von Lösungen?

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie alle maximalen Lösungen von $\dot{x} = v(x)$ zum Anfangswert $x(0) = -1$ und skizzieren Sie einige der Lösungen in einem Raum-Zeit-Diagramm!

Aufgabe 41: Nochmals getrennte Variable

Sei $v : \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$v(t, x) = \frac{t^2}{\sin(x)}$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung von $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ zum Anfangswert $x(0) = \frac{\pi}{3}$.