Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2014/2015
8. Dezember 2014

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 9

Aufgabe 42: Globale Existenz

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existiert eine Konstante $L < \infty$, sodass $\|v(x) - v(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = v(x(t)) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0$$

existiert.

Tipp: Verwenden Sie die untere Schranke an das Existenzintervall der lokalen Lösung aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 43: Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten und vom Vektorfeld

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und $w : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = v(x) \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$
$$\dot{y} = w(y) \qquad y(0) = x_0. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Gronwall, dass die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung (1) für jedes festes t im Existenzintervall $I(x_0)$ stetig vom Anfangswert x_0 abhängt. Sie dürfen verwenden, dass $\Omega = \{(t, x) \,|\, t \in I(x)\}$ offen ist.

(b) Nehmen Sie nun an, dass die Lösung $y(t)$ zu (2) auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $\tilde{I} \subset I(x_0)$ existiere. Zeigen Sie, dass dann für $t \in \tilde{I}$ gilt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq |\tilde{I}| \, \|v - w\|_\infty \, \mathrm{e}^{Lt}.$$

Aufgabe 44: Der Lösungsoperator linearer Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ zum Anfangszeitpunkt t_0. Zeigen Sie:

- Für alle $t \in I$ ist $\Phi(t)$ ein Vektorraumisomorphimus.
- Die Matrix $\Phi(t)$ erfüllt
$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{mit} \quad \Phi(t_0) = E_n.$$

Aufgabe 45: Qualitatives Verhalten und Stabilität von stationären Punkten

Betrachten Sie das folgende autonome System $(\dot{x}, \dot{y}) = v(x, y)$ von Differentialgleichungen gegeben durch:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}y} \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\\ \dot{y} &= -\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}y} \cos\left(\frac{3}{2}x\right).\end{aligned}$$

Wir wollen zumindest qualitativ die Lösungen dieses Systems verstehen und gehen dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte $\dot{x} = \dot{y} = 0$. (Hinweis: Es muss gelten $y = 0$.)
- Bestimmen Sie die lineare Approximation des Vektorfelds $v(x, y)$ um die stationären Punkte (x_i, y_i), d.h. bestimmen Sie die Matrix A_i, sodass

  $$v(x, y) \approx A_i \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix}$$

  gilt. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_i. Diskutieren Sie anhand der Matrix A_i das Verhalten der Lösungen in der Nähe des jeweiligen Fixpunkts, insbesondere auch in Hinblick auf Stabilität.
- Skizzieren Sie das Vektorfeld und einige zugehörige Integralkurven in der Nähe der stationären Punkte.
- Überlegen Sie sich, wie das Vektorfeld für $y \gg 0$ und für $y \ll 0$ jeweils aussieht und skizzieren Sie das Vektorfeld und einige Integralkurvenauch auch außerhalb der kritischen Punkte. Finden Sie insbesondere die Separatrizen, also diejenigen Kurven, die Gebiete qualitativ unterschiedlicher Lösungen im Phasenraum voneinander abgrenzen. (Beim ebenen Pendel ist die Integralkurve, welche die instabile Gleichgewichtslage mit sich selbst verbindet, eine Separatrix.)