Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
10.11.2003
Blatt 04

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Zeigen Sie, dass die Sphäre $\mathbf{S}^n$, der projektive Raum $\mathbf{P}^n$ und der Torus $\mathbf{T}^n$ $(n \geq 1)$ zusammenhängend und kompakt sind.

2. Sei M *die Sinuskurve der Topologen*,
$$M = \{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbf{R}^2 : \ t > 0\} \cup (\{0\} \times [0,1]).$$
Zeigen Sie:
   (a) M ist nicht wegzusammnhängend.
   (b) M ist zusammenhängend. (Hinweis: Ist $M = U \dot\cup V$, $U, V \subseteq M$ offen, und $p, q \in M$ durch einen Weg verbindbar, so sind $p, q \in U$ oder $p, q \in V$.)

3. Zeigen Sie, dass der Kegel $K \subseteq \mathbf{R}^3$,
$$K = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\},$$
keine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

4. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ ein topologischer Atlas, $\{\varphi_{ij}\}$ seine Übergänge und $Q = \sum_{i \in I} V_i/\sim$, wo $x_i \sim x_j$ ist, wenn $x_i = \varphi_{ij}(x_j)$ $(x_i \in V_i, x_j \in V_j)$ ist. Sei weiter $\Psi : Q \to M$ die stetige Abbildung, die $\Psi \circ \pi(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i)$ erfüllt (π die kanonische Projektion auf den Quotienten Q). Zeigen Sie, dass Ψ ein Homöomorphismus ist.

Abgabe: Donnerstag, 17. November 2005, 9.15 Uhr