Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
17.11.2003
Blatt 05

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\{\varphi_i: U_i \to V_i\}_{i\in I}$ ein topologischer Atlas, $\{\varphi_{ij}\}$ seine Übergänge und $Q = \sum_{i\in I} V_i/\sim$, wo $x_i \sim x_j$ ist, wenn $x_i = \varphi_{ij}(x_j)$ ($x_i \in V_i$, $x_j \in V_j$) ist. Sei weiter $\Psi: Q \to M$ die stetige Abbildung, die $\Psi \circ \pi(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i)$ erfüllt (π die kanonische Projektion auf den Quotienten Q). Zeigen Sie, dass Ψ ein Homöomorphismus ist.

2. (a) Sei $\varphi: \mathbf{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N = (0,\ldots,0,1)$ heraus, d.h. $(\varphi(p),0)$ ist der Schnittpunkt der Geraden L durch N und p mit der Ebene $H = \{p \in \mathbf{R}^{n+1} : p^{n+1} = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\varphi(p) = p/(1-p^{n+1})$ ist und für die Umkehrung $\varphi^{-1}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^n \setminus \{N\}$ gilt:
$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{1+|x|^2}(2x, -1+|x|^2)$$
   (b) Berechnen Sie nun auch die stereographische Projektion aus dem Südpol $S = (0,\ldots,0,-1)$ heraus, $\psi: \mathbf{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbf{R}^n$, und zeigen Sie für den Übergang $\varphi \circ \psi^{-1}: \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$:
$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

3. Sei
$$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y^2 = x^3\}$$
   die Neill'sche Parabel.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $\pi: M \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto y$, M zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (der Dimension 1) wird.
   (b) Zeigen Sie, dass M diffeomorph zu $\mathbf{R}$ (mit ihrer Standard-Struktur) ist.

4. Auf $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $z \sim w$, wenn es ein $\lambda \in \mathbf{C}^*$ mit $w = \lambda z$ gibt. Die Quotientenmenge heißt der *n-dimensionale komplex-projektive Raum*, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) := \mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim$. Versehen Sie nun $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (der Dimension $2n$).

Abgabe: Donnerstag, 24. November 2005, 9.15 Uhr