Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
24.11.2003
Blatt 06

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Sei M eine Menge und Γ eine Gruppe. Es operiere Γ auf M durch $\Gamma \times M \to M$, $(\gamma, p) \mapsto \gamma.p$. Sei $p \in M$, $\Gamma p \subseteq M$ die zugehörige Bahn und $\Gamma_p \subseteq \Gamma$ ihre Standgruppe. Zeigen Sie, dass die Bahnabbildung $\Gamma \to M$, $\gamma \mapsto \gamma.p$ eine Bijektion von Γ/Γ_p nach Γp induziert.

2. Sei $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ der komplex-projektive Raum (vgl. Aufgabe 4, Blatt 5) und $\mathbf{SU}(n+1)$ die Gruppe der speziellen, unitären $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{SU}(n+1) \times \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, $(A, [z]) \mapsto [Az]$ eine Operation von $\mathbf{SU}(n+1)$ auf $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ gegeben ist.
   (b) Zeigen Sie, dass diese Wirkung transitiv ist und bestimmen Sie die Standgruppe im Punkt $(0 : \ldots : 0 : 1)$.

3. Sei V ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum und $\mathbf{GL}(V)$ die Gruppe der Automorphismen von V.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{GL}(V) \times V \to V$, $(T, v) \mapsto Tv$ eine Darstellung gegeben ist, bei der es genau zwei Bahnen gibt.
   (b) Sei $\mathrm{Sym}(V)$ der Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf V. Zeigen Sie, dass durch $\mathbf{GL}(V) \times \mathrm{Sym}(V) \to \mathrm{Sym}(V)$,
   $$T.s(v, w) := s(T^{-1}v, T^{-1}w),$$
   eine Darstellung gegeben ist. Wieviele Bahnen gibt es?

4. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^n$, $t \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$ einen Homöomorphismus $\Psi\colon \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to \mathbf{T}^n$ induziert.
   (b) Zeigen Sie, dass Ψ sogar ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Donnerstag, 1. Dezember 2005, 9.15 Uhr