Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
01.12.2005
Blatt 07

Übungen zu “Differentialgeometrie I”

1. Eine $\mathbf{R}$-Algebra A heißt *lokal*, wenn A nur ein maximales Ideal hat. Zeigen Sie, dass eine $\mathbf{R}$-Algebra A genau dann lokal ist, wenn $A \setminus A^*$ ein Ideal ist ($A^* = \{\text{Einheiten in } A\}$). (Erinnerung: Jede Nicht-Einheit in einem Ring liegt in einem maximalen Ideal (Zorn).)

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $A = \mathcal{E}_p(M)$ die $\mathbf{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime von M in p. Zeigen Sie, dass $f_p \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f_p(p) \neq 0$ ist und damit, dass A eine lokale $\mathbf{R}$-Algebra ist.

3. Sei A die $\mathbf{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime in $p = 0$ von $M = \mathbf{R}$. Für jede offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und jedes glatte $f\colon U \to \mathbf{R}$ bezeichne $Tf_p \in \mathbf{R}[[x]]$ die Taylorreihe von f in p (als formale Potenzreihe), $Tf_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Zeigen Sie, dass $T\colon A \to \mathbf{R}[[x]]$, $f_p \mapsto Tf_p$ wohldefiniert ist und ein Algebra-Homomorphismus ist. Ist T injektiv, ist T surjektiv?

4. Sei A die $\mathbf{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime von $M = \mathbf{R}^n$ in $p = 0$ und $\mathbf{m} = \{f_p \in A\colon f_p(p) = 0\}$ ihr maximales Ideal. Zeigen Sie, dass $s = f_p \in A$ ($f \in \mathcal{E}(U)$, $U \subseteq \mathbf{R}^n$ offene Umgebung von p) genau dann in $\mathbf{m}^2$ ist, wenn gilt ($i = 1, \dots, n$):

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$$

(Hinweis: Benutzen Sie Lemma (2.42) aus der Vorlesung.)

Abgabe: Donnerstag, 8. Dezember 2005, 9.15 Uhr