Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
15.12.2005
Blatt 09

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Beweisen die folgende *Kettenregel*: Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ und $\Psi\colon N \to P$ glatte Abbildungen, $p \in M$, $q = \Phi(p)$ und $r = \Psi(q)$. Es ist dann auch $\Psi \circ \Phi\colon M \to P$ glatt und für ihr Differential in p gilt:
$$D(\Psi \circ \Phi)_p = D\Psi_q \circ D\Phi_p$$

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f\colon M \to \mathbf{R}$ eine glatte Funktion und $p \in M$. Identifiziert man den Tangentialraum $T\mathbf{R}_t$ von $N = \mathbf{R}$ in jedem Punkt $t \in \mathbf{R}$ kanonisch mit $\mathbf{R}$, so zeigen Sie, dass gilt: $Df_p = df_p$.

3. Sei M^n ein glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Menge versehen mit ihrer induzierten glatten Struktur. Sei $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Karte, $\partial/\partial x^i \in \mathcal{X}(U)$ $(i = 1, \ldots, n)$ die induzierten Koordinatenvektorfelder und $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie:
   (a) φ ist ein Diffeomorphismus;
   (b) identifiziert man für jedes $x \in V$ den Tangentialraum TV_x kanonisch mit $\mathbf{R}^n$, so gilt für alle $p \in U$ und $i = 1, \ldots, n$:
$$D\varphi_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = e_i$$

4. Sei M^{n+k} eine glatte Mannigfaltigkeit und $N^n \subseteq M^{n+k}$ eine Umtermannigfaltigkeit der Codimension k sowie $i\colon N \to M$ die Inklusion. Zeigen Sie:
   (a) Es ist i *eine Immersion*, d.h. für jedes $p \in N$ ist $Di_p\colon TN_p \to TM_p$ injektiv. (Hinweis: Bzgl. geeigneter Karten $\varphi\colon \tilde{U} \to V \times W \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ und $\psi\colon \tilde{U} \cap N \to V \subseteq \mathbf{R}^n$ um p ist $\varphi \circ i \circ \psi^{-1}(x) = (x, h(x))$ für eine glatte Funktion $h\colon V \to W$.)
   (b) Ist $p \in N$, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung und $F\colon U \to \mathbf{R}^k$ eine glatte Funktion mit $F^{-1}(0) = N \cap U$ und $\operatorname{rang}(DF_p) = k$, so gilt:
$$\operatorname{im}(Di_p) = \ker(DF_p)$$

Abgabe: Donnerstag, 22. Dezember 2005, 9.15 Uhr