Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
22.12.2005
Blatt 10

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{H}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \ (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = -1 \ \text{ und } \ x^{n+1} > 0\}$$

eine Hyperfläche im $\mathbf{R}^{n+1}$ ist.

2. Sei $n \in \mathbf{N}$ und $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ die allgemeine lineare Gruppe aller regulären $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie:

   (a) $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ und damit eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2.

   (b) Sei $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ die Untergruppe der $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante 1 (*die spezielle lineare Gruppe*). Zeigen Sie, dass $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ eine Hyperfläche in $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ und damit eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$ ist.

3. Beweisen Sie den folgenden *Umkehrsatz*: Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $q = \Phi(p)$. Sei $D\Phi_p\colon TM_p \to TN_q$ ein Isomorphismus. Dann gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von q, so dass $\Phi(U) = V$ ist und $\Phi|U\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. (Hinweis: Wählen Sie Karten x bzw. y um p bzw. q und benutzen Sie den Umkehrsatz für $y \circ \Phi \circ x^{-1}$.)

4. Sei A eine Menge, $\mathbf{F}(A)$ der Vektorraum, der von A frei erzeugt wird und sei $i\colon A \to \mathbf{F}(A)$, $i(a) = 1a$. Zeigen Sie, dass das Paar $(\mathbf{F}(A), i)$ folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist V ein reeller Vektorraum und $j\colon A \to V$ eine Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T\colon \mathbf{F}(A) \to V$ mit $T \circ i = j$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr

Abgabe: Donnerstag, 12. Januar 2006, 9.15 Uhr