Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
02.02.2006
Blatt 14

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi: L \to M$ eine Geradenbündel über M.

   (a) Zeigen Sie, dass das Tensorbündel $L^* \otimes L$ trivial ist. (Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass $\mathrm{spur}: L^* \otimes L \to \underline{\mathbf{R}}$ (vgl. Aufgabe 4, Blatt 11) ein Bündelisomorphismus ist oder dass $L^* \otimes L$ einen nullstellenfreien Schnitt hat (vgl. Aufg. 2, Blatt 13).)

   (b) Zeigen Sie, dass auf den Isomorphieklassen von Geradenbündeln über M durch $[L_1] \cdot [L_2] := [L_1 \otimes L_2]$ eine (abelsche) Gruppenstruktur erklärt ist.

2. Seien $\pi_1: E_1 \to M$ und $\pi_2: E_2 \to M$ Vektorraumbündel und $U, V \subseteq M$ offen, so dass es Bündelkarten $\varphi_j: \pi_j^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{k_j}$ bzw. $\psi_j: \pi_j^{-1}(V) \to V \times \mathbf{R}^{k_j}$ von π_j gibt $(j = 1, 2)$. Konstruieren Sie Bündelkarten $\varphi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^{k_1 k_2}$ bzw. $\psi: \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbf{R}^{k_1 k_2}$ des Tensorbündels $\pi: E_1 \otimes E_2 \to M$, so dass für den Übergang $\tau: U \cap V \to \mathbf{GL}_{k_1 k_2}(\mathbf{R})$ gilt (wo τ_1 bzw. τ_2 den Übergang von π_1 bzw. π_2 bezeichnet, $1 \leq i_1, j_1 \leq k_1$, $1 \leq i_2, j_2 \leq k_2$):
$$\tau(p)^{(i_1,i_2)}_{(j_1,j_2)} = \tau_1(p)^{i_1}_{j_1} \tau_2(p)^{i_2}_{j_2}$$

3. Sei $\pi: E \to M$ ein Vektorraumbündel (vom Rang k) und $0 \leq p \leq k$. Zeigen Sie: Ist $\tau: U \cap V \to \mathbf{GL}_k(\mathbf{R})$ ein Übergang eines Bündelatlas' von π, so gilt für den induzierten Atlas auf dem Bündel $\Lambda^p E \to M$, dass er den folgenden Übergang $\sigma: U \cap V \to \mathbf{GL}_{\binom{k}{p}}(\mathbf{R})$ hat ($I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$, $J = \{j_1 < \ldots < j_p\}$):
$$\sigma(p)^I_J = \det(\tau(p)^I_J)$$

Abgabe: Donnerstag, 9. Februar 2006, 9.15 Uhr