Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
09.02.2006
Blatt 15

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \to N$ sowie $\Psi: N \to P$ glatte Abbildungen. Zeigen Sie für jede k-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(P)$:
$$(\Psi \circ \Phi)^*(\omega) = \Phi^*(\Psi^* \omega)$$

2. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $y: V \to \tilde{V} \subseteq \mathbf{R}^r$ eine Karte auf N, sei $\omega = \eta_J(y)\, dy^J$ eine glatte k-Form auf V und sei $U = \Phi^{-1}(V)$. Zeigen Sie, dass für den Rückzug $\Phi^*\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ gilt:
$$\Phi^*\omega = \eta_J \circ \Phi\, d(y^{j_1} \circ \Phi) \wedge \ldots \wedge d(y^{j_k} \circ \Phi)$$

3. (a) Sei $U \subseteq \mathbf{R}$ eine offene Menge und ω eine glatte $(n-1)$-Form auf U,
$$\omega = (-1)^i \eta_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$
mit einem glatten $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n): U \to \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $d\omega = f(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ mit einer glatten Funktion $f: U \to \mathbf{R}$, so ist $f = \operatorname{div}(\eta)$.

   (b) Sei nun $U \subseteq \mathbf{R}^3$ eine offene Menge. Zeigen Sie: Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ eine glatte 1-Form, $\omega = \alpha_i dx^i$, und $d\omega = \eta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \eta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \eta_3 dx^1 \wedge dx^2$, so ist für $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3): U \to \mathbf{R}^3$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): U \to \mathbf{R}^3$: $\eta = \operatorname{rot}(\alpha)$.

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $0 \leq k \leq n$. Die *k-te de Rhamsche Cohomologiegruppe* ist der Vektorraum
$$H^k(M; \mathbf{R}) := \frac{\ker\{d_k: \mathcal{E}^{(k)}(M) \to \mathcal{E}^{(k+1)(M)}\}}{\operatorname{im}\{d_{k-1}: \mathcal{E}^{(k-1)}(M) \to \mathcal{E}^{(k)}(M)\}}.$$
Zeigen Sie: Ist M zusammenhängend, so ist $H^0(M; \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$.

Abgabe: Donnerstag, 16. Februar 2006, 9.15 Uhr