Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2005/06
16.02.2006
Blatt 16

Übungen zu "Differentialgeometrie I"

1. Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ offen. *Das vektorielle Linienelement von U* wird definiert durch $\vec{ds} \in (\mathcal{E}^{(1)}(U))^n$,
$$\vec{ds} := (dx^1, \ldots, dx^n).$$
Sei nun $M \subseteq \mathbf{R}^3$ eine orientierte Fläche, $K \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand $C := \partial K$ und $\tau\colon C \to \mathbf{R}^3$ das orientierte Einheitstangentenfeld entlang C. Zeigen Sie, dass für das Linienelement ds von C die Formel $\vec{ds} = \tau\, ds$ in dem Sinne gilt, dass für alle glatten Vektorfelder $X\colon C \to \mathbf{R}^3$ entlang C gilt:
$$\int_C \langle X, \tau \rangle\, ds = \int_C \langle X, \vec{ds} \rangle.$$
(Erinnere: Ist $\alpha\colon I \to C$, $I \subseteq \mathbf{R}$ offen, eine (lokale) Parametrisierung von C, so gilt: $ds = |\dot{\alpha}(t)|\, dt$.)

2. Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ offen. *Das vektorielle Oberflächenelement von U* wird definiert durch $\vec{dS} \in (\mathcal{E}^{(n-1)}(U))^n$,
$$\vec{dS} := (\ldots, (-1)^{j-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n, \ldots).$$
Sei nun $K \subseteq U$ kompakt mit glattem Rand und dS das Oberflächenelement des Randes $M := \partial K$. Bezeichnet weiter $\nu\colon M \to \mathbf{R}^n$ die äußere Einheitsnormale an K, so zeigen Sie, dass $\vec{dS} = \nu\, dS$ gilt in dem Sinne, dass für alle glatten Vektorfelder $X\colon M \to \mathbf{R}^n$ entlang M gilt:
$$\int_M \langle X, \nu \rangle\, dS = \int_M \langle X, \vec{dS} \rangle$$
(Erinnere: Ist $\varphi\colon V \to U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ offen, eine lokale Parametrisierung, so gilt mit der Jacobischen $J_\varphi\colon V \to \mathbf{R}$, $J_\varphi(t) = \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$, dass $dS = J_\varphi(t)\, dt$ ist. Vgl. Forster III, Kap. 20, Satz 3.)

Abgabe: keine mehr