Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/6
19.1.2006

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Übungsblatt 11

Aufgabe 38. Beweisen Sie aus der Kettenregel, der Produktregel und der Ableitung von $x \mapsto 1/x$ die *Quotientenregel*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Zeigen Sie daraus weiter für $\tan = \sin / \cos$:

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 39. Beweisen Sie aus der Kettenregel: Ist die Funktion $g : [a, b] \to [c, d]$ streng monoton wachsend und hat daher eine Umkehrfunktion $f = g^{-1}$, so gilt die *Umkehrregel*

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Bestimmen Sie damit die Ableitung von log aus der von exp, und zeigen Sie, dass

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 40. In welchem Winkel φ zur Horizontalen sollte man einen Ball werfen, damit er möglichst weit fliegt? Wir beantworten diese Frage unter Vernachlässigung von Luftreibung und Wind. Die Flugbahn des Balls ist eine Wurfparabel in einer vertikalen Ebene des $\mathbb{R}^3$, die wir mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Ball startet im Ursprung mit Geschwindigkeit $v = (b \cos \varphi, b \sin \varphi)$, wobei $b = \|v\|$ durch Ihre Muskelkräfte vorgegeben ist. Er durchläuft dann die Parabelbahn $f(\varphi, t) = vt - \frac{1}{2}(0, g)t^2$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, bis er wieder auf der Ausgangshöhe $x_2 = 0$ eintrifft, und zwar mit der x_1-Koordinate $w(\varphi)$, der Wurfweite. (Wir sehen davon ab, dass der Abwurfpunkt 1 bis 2 m über dem Erdboden liegen kann.) Bestimmen Sie die Funktion w auf $[0, \pi/2]$ und ermitteln Sie ihr Maximum. (8 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 26.1.2006, zu Beginn der Vorlesung.

Englisch-Vokabeln: Ableitung = derivative, Polynom = polynomial, Tangente = tangent, Stammfunktion = anti-derivative, Differenzial-Gleichung = differential equation, differenzierbar = differentiable, differenzieren (Ableitung bilden) = differentiate, Beschleunigung = acceleration, Dichte = density