Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/6
26.1.2006

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Übungsblatt 12

Aufgabe 41. Seien $w_1, \ldots, w_n$ fehlerbehaftete Messwerte, die wir zu einem Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ zusammenfassen, und nehmen wir an, dass aufgrund von Naturgesetzen der Vektor $W = (W_1, \ldots, W_n)$ der wahren Werte auf der Geraden $G = \{u + \alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ für bestimmte $u, v \in \mathbb{R}^n$ liegen muss. Bestimmen Sie denjenigen Punkt x auf G, der dem w am nächsten liegt. Anleitung: Schreiben Sie $x = u + \alpha v$ und bestimmen Sie dasjenige α, das $D(\alpha) = d(x, w)$ minimiert. Die Rechnung lässt sich vereinfachen, indem man statt $D(\alpha)$ die Funktion $f(\alpha) = d(x, w)^2$ minimiert, was auf dasselbe α führt (begründen Sie warum). (5 Punkte)

Aufgabe 42. Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$U(a, b, c) = ab^2c^3 + ce^{a/b} + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 43. Populationsmodell von Malthus (1798). Sei $N(t)$ die Anzahl Individuen (in Millionen) einer Tierpopulation zur Zeit t. Seien die (pro Kopf-) Geburtenrate $g > 0$ und die Sterberate $s > 0$ Konstanten. Dann gilt

$$\frac{dN}{dt} = gN - sN\,.$$

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet $N(t) = e^{(g-s)t}N(0)$ (exponentielles Wachstum). Die Größe $g - s$ heißt auch *Wachstumsrate*. (2 Punkte)

Aufgabe 44. Logistisches Populationsmodell. Die Wachstumsrate ist realistischerweise von N selbst abhängig, in so einer Weise, dass eine zu große Population nicht mehr weiter wächst (z.B. wegen Nahrungsmangel). Verhulst (1836) schlug als konkretes Modell die Wachstumsrate $r(1 - N/K)$ mit positiven Konstanten r, K vor. Die *logistische Differenzialgleichung* lautet dann

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = rN(1 - N/K)\,. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die *stationären Zustände* $\tilde{N}_i$, also diejenigen Werte von N, bei denen $dN/dt = 0$ ist.

Einige dieser stationären Zustände sind stabil, andere instabil. Um das Verhalten in der Nähe jedes $\tilde{N}_i$ zu untersuchen, ersetzen wir (1) durch die *linearisierten Differenzialgleichungen*

$$\frac{dN}{dt} = T_i(N) = f(\tilde{N}_i) + (N - \tilde{N}_i)f'(\tilde{N}_i)\,, \tag{2}$$

bei der wir also die Funktion f durch ihre Tangente T_i in $\tilde{N}_i$ ersetzt haben. Von der linearisierten Gleichung können wir erwarten, dass sie $N(t)$ näherungsweise richtig wiedergibt, solange die Lösung $N(t)$ von (1) sich in der Nähe von $\tilde{N}_i$ aufhält. Bestimmen Sie die Lösungen von (2) für jedes der $\tilde{N}_i$, und beschreiben Sie in Worten, wie sich die Lösungen von (1) in der Nähe der $\tilde{N}_i$ verhalten. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 2.2.2006, zu Beginn der Vorlesung.