Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/6
2.2.2006

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Übungsblatt 13

Aufgabe 45. Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv-definit ist. (5 Punkte)

Aufgabe 46. Wir betrachten die Ebene $z = f(x,y) = 2x + y$ im $\mathbb{R}^3$. Rechnen Sie nach, dass die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $e = (\cos\gamma, \sin\gamma) \in \mathbb{R}^2$ in der xy-Ebene lautet $\partial f/\partial e = c\,\sin(\gamma + \varphi)$ mit $c = \sqrt{5}$ und $\varphi = \arctan 2$ (hier lässt sich Aufgabe 18 benutzen). Bestimmen Sie die Richtungen (als Winkel γ), in denen es am steilsten bergauf, am steilsten bergab geht, und auf gleicher Höhe bleibt. (5 Punkte)

Aufgabe 47. "Fehlerfortpflanzung". Wenn zwischen den Größen x und y der Zusammenhang $y = f(x)$ mit bekanntem f besteht, der Messwert für x aber mit der Ungenauigkeit Δx behaftet ist, wie groß ist dann die Ungenauigkeit Δy des aus x berechneten y-Wertes? Genau genommen muss man Maximum $-$ Minimum von f auf dem Intervall $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ betrachten. Eine viel schnellere Schätzmethode, die für kleines Δx gut ist, beruht darauf, f auf dem Intervall $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ durch eine lineare Funktion zu ersetzen, nämlich die Tangente von f in x. Daraus erhält man $\Delta y = f'(x)\,\Delta x$. Bestimmen Sie so y und Δy für die zwei Werte

$$x \pm \Delta x = \quad 3.71 \pm 0.11, \quad 4.58 \pm 0.08$$

in folgendem Beispiel: $x =$ elektrische Ladung auf einem leitfähigen Körper, $y =$ elektrische Energie, $f(x) = \frac{1}{2C}x^2$, $C =$ elektrische Kapazität mit Zahlenwert 3.2. (5 Punkte)

Aufgabe 48. Fehlerfortpflanzung bei Funktionen mehrerer Variabler. Sei nun $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Ist $x_i = X_i + \varepsilon_i$ für $x_i =$ Messwert, $X_i =$ wahrer Wert, $\varepsilon_i =$ zufälliger Fehler, so ergibt sich $y = Y + \varepsilon$ mit $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ und (näherungsweise für kleine ε_i)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i\,. \tag{1}$$

Die gesuchte Größe ist die Ungenauigkeit Δy von y, also die Streuung des zufälligen Fehlers ε (= Breite der Verteilung von ε). Die beträgt höchstens $q = \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$, wenn Δx_i die Streuung von ε_i ist. Oft ist Δy aber viel kleiner: Das liegt daran, dass sich ein Fehler des Ausmaßes q nur dann ergibt, wenn alle Summanden in Gl. (1) positiv oder alle negativ sind. Typischerweise sind jedoch manche positiv und manche negativ, so dass manche zufällige Fehler einander *kompensieren.* Sind die beitragenden Fehler ε_i *unabhängig* voneinander und genügen einer Gauß-Verteilung, so lässt sich zeigen, dass

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Delta x_i\Big)^2}\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie Δy gemäß (2) in folgendem Beispiel: $x =$ elektrische Ladung auf einem leitfähigen Körper, $y =$ elektrische Energie, $f(x, C) = \frac{1}{2C}x^2$, $C =$ elektrische Kapazität; Zahlenwerte $x = 3.71$, $C = 3.2$, $\Delta x = 0.11$, $\Delta C = 0.19$. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 9.2.2006, zu Beginn der Vorlesung.