Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/6
24.11.2005

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Da das menschliche Auge aus einzelnen Sehzellen besteht, sieht man tatsächlich alles "gepixelt" mit einer Auflösung (Pixelgröße) von einer halben Bogenminute. Mit welcher Auflösung ($n \times m$ Pixel) sehen Sie eine Tafel, die 2 m hoch und 3 m breit ist, wenn Sie mittig vor ihr im Abstand von 10 m sitzen? (4 Punkte)

Aufgabe 22. Im Rechnen mit Matrizen gelten etwas andere Regeln als beim Rechnen mit Zahlen. (a) Zeigen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $A^2 = 0$ (obwohl $A \neq 0$), $B^2 = -I$ (obwohl die Gleichung $x^2 = -1$ in den reellen Zahlen keine Lösung hat), und $AB \neq BA$. (b) Begründen Sie, warum die Regeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ im allgemeinen nicht gelten, wenn a und b statt Zahlen $n \times n$-Matrizen sind. (5 Punkte)

Aufgabe 23. Beweisen Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus aus den folgenden zwei Fakten: 1. Wenn $D_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn) bedeutet, dann ist $D_\beta(D_\alpha(x)) = D_{\beta+\alpha}(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^2$. (Zuerst um α und dann um β drehen ergibt dasselbe wie gleich um $\alpha + \beta$ drehen.) 2. D_α ist die Multiplikation (von links) mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 24. In einem Experiment werden folgende 4 Himmelsrichtungen (als Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn, beginnend im Osten) gemessen: $32°, 46°, 48°, 51°$. Bestimmen Sie die zugehörigen Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_4 \in \mathbb{R}^2$ (erste Achse nach Osten, zweite nach Norden), deren arithmetisches Mittel $\overline{e}$, den Einheitsvektor e_{mittel} in Richtung von $\overline{e}$, und dessen Winkel $\varphi_{\mathrm{mittel}}$. (6 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 1.12.2005, zu Beginn der Vorlesung.

Englisch-Vokabeln: Einheitsvektor = unit vector, Summe = sum, Produkt = product, rechter Winkel = right angle, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Satz = theorem, Fließkomma-Schreibweise = floating point notation, Matrix = matrix, Matrizen = matrices.