
MATHEMATIK I FÜR BIOLOGEN, GEOLOGEN UND
GEOÖKOLOGEN
Übungsblatt 8

Aufgabe 28. Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) ein glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter, und so fort. So kann Achilles nie die Schildkröte einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position x_0 der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise: mit Hilfe der geometrischen Reihe, und indem Sie Gleichungen für die Position $x_A(t)$ des Achilles und die Position $x_S(t)$ der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung $x_A(t) = x_S(t)$ ermitteln. (5 Punkte)

Aufgabe 29. Bestimmen Sie mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{n}{2n+1}, \quad c_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad d_n = e^{-(2n+1)}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 30. Aus der Fibonacci-Folge, definiert durch $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, bilden wir

$$a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Diese Folge ist konvergent. Bestimmen Sie den Grenzwert. Anleitung: Leiten Sie aus der Rekursionsgleichung für F_n eine für a_n ab. Benutzen Sie dann, dass $\lim a_{n-1} = \lim a_n$, um eine Gleichung für $\lim a_n$ zu gewinnen. (4 Punkte)

Aufgabe 31. Zeigen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und sind die beiden Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig, dann sind auch $f + g$ und fg stetig. Hierbei sind Summe und Produkt von Funktionen punktweise definiert, d.h. $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Anleitung: Verwenden Sie die entsprechenden Sätze aus der Vorlesung über konvergente Folgen und die Definition der Stetigkeit. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 22.12.2005, zu Beginn der Vorlesung.

Englisch-Vokabeln: Grenzwert = limit, endlich = finite [fáinait], unendlich = infinite [ínifinit], Reihe (unendliche Summe) = series, beschränkt = bounded, a_n geht gegen a = a_n tends to a , konvergieren = to converge, divergieren = to diverge, Partialsumme = partial sum, stetig = continuous.