Dr. R. Tumulka, M. Fromm
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/06
19.1.2005

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Computer-Übungsblatt 11

Aufgabe C24. Simulation eines Osmose-Vorgangs.

Wir betrachten die Situation, dass eine durchlässige Membran zwei wassergefüllte Kammern K_1, K_2 von einander trennt, in denen eine Substanz (z.B. Salz) in den Konzentrationen (Molzahl) ρ_1, ρ_2 vorhanden sind. Wir nehmen an, dass beide Kammern stets so durchmischt werden, dass die Konzentration innerhalb jeder Kammer räumlich konstant ist. Die Konzentration ändert sich zeitlich, weil pro Zeiteinheit Δt eine Anzahl $j_{12}\,\Delta t$ (in Mol) von Molekülen durch die Membran von K_1 nach K_2 treten und $j_{21}\,\Delta t$ Moleküle von K_2 nach K_1, also

$$\rho_1(t+\Delta t) = \rho_1(t) - j_{12}(t)\,\Delta t + j_{21}(t)\,\Delta t. \tag{1}$$

$$\rho_2(t+\Delta t) = \rho_2(t) - j_{21}(t)\,\Delta t + j_{12}(t)\,\Delta t. \tag{2}$$

Wir nehmen weiter an, dass der *Strom* j_{12} proportional zur Konzentration ρ_1 ist,

$$j_{12} = \kappa\rho_1\,, \quad j_{21} = \kappa\rho_2.$$

Schreiben Sie ein Programm, dass den zeitlichen Verlauf simuliert, und plotten Sie ρ_1 und ρ_2 als Funktionen von t im Zeitintervall $[0, 10]$. Nehmen Sie dazu an, dass zur Zeit $t = 0$ gilt $\rho_1(0) = 1$ und $\rho_2(0) = 0$, und setzen Sie $\kappa = \frac{1}{4}$, $\Delta t = 0.1$.

Plotten Sie zum Vergleich in dasselbe Diagramm die Funktion

$$\sigma_2(t) = \lambda - \lambda e^{-t/\tau}$$

mit Konstanten $\lambda = \frac{1}{2}$, $\tau = 2$. Die Funktion σ_2 heißt eine *Sättigungsfunktion*; sie wächst von Null und nähert sich dem Maximalwert λ an, den sie aber nie erreicht. Die Konstante τ gibt an, wie schnell die Annäherung stattfindet.

Um zu verstehen, wieso die einfache Formel von σ_2 den Osmose-Vorgang so gut wiedergibt, bemerken wir, dass die Gleichungen (1) und (2) im Limes $\Delta t \to 0$ in die *Differenzial-Gleichungen*

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -j_{12}(t) + j_{21}(t)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -j_{21}(t) + j_{12}(t)$$

übergehen. Da $\rho_1 + \rho_2$ infolge (1) und (2) konstant ist, lässt sich $\rho_1(t) = c - \rho_2(t)$ schreiben (wobei $c = \rho_1(0)$); wir erreichen daher die Differenzial-Gleichung

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \kappa c - 2\kappa\rho_2. \tag{3}$$

Prüfen Sie schriftlich nach, dass $\rho_2 = \sigma_2$ eine Lösung von (3) ist, und ermitteln Sie die Gleichungen, die zwischen κ und c einerseits und λ und τ andererseits gelten. (10 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 26.1.2005, zu Beginn der Vorlesung. Bitte geben Sie immer auch einen Ausdruck des von Ihnen verfassten Programmcodes ab.