Dr. R. Tumulka, M. Fromm
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/06
26.1.2005

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Computer-Übungsblatt 12

Aufgabe C25. Populationsmodell von Lottka und Volterra. Wir simulieren die Entwicklung zweier Tier-Populationen N (Beute) und P (Räuber) als Funktion der Zeit t; $N(t), P(t)$ sind die Anzahlen der jeweiligen Individuen (in Millionen) zum Zeitpunkt t. Lottka und Volterra schlugen unabhängig voneinander folgende gekoppelten Differentialgleichungen als Modell der zeitlichen Entwicklung vor:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP)\,, \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d)\,. \tag{1}$$

Dabei sind a, b, c, d positive Konstanten. Das Modell (1) beruht auf folgenden Annahmen: Pro Beutetier und Zeiteinheit ist die Anzahl der Geburten minus natürliche Todesfälle durch a gegeben, während die Anzahl bP der Todesfälle durch Gefressenwerden proportional ist zur Anzahl der Raubtiere P. Pro Raubtier und Zeiteinheit vermehren sich die Raubtiere um $cN - d$; dieser Betrag wächst mit der verfügbaren Nahrung und würde in Abwesenheit jeglicher Beute $-d$ betragen.

Stellen Sie N und P als Funktion der Zeit ($t \in [0, 50]$) in einem Diagramm graphisch dar mit $a = 0.5, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.6$ für die drei verschiedenen Anfangswerte $(N(0), P(0)) = (1, 0.5)$, $(3, 0.5)$ und $(3, 2)$. Gehen Sie dazu wie im folgenden Beispiel vor. Im Unterschied zu Aufg. C24 ist hier die Simulation durch Differenzenquotienten für kleine Zeitschritte Δt zu ungenau. Stattdessen hat *octave* spezielle Befehle zur Lösung von Differenzialgleichungen, sog. *Integratoren* oder *solver*.

Beispiel: Zu lösen seien die gekoppelten Differenzialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha y_1 - \beta y_2\,, \quad \frac{dy_2}{dt} = \gamma y_2 y_1\,, \tag{2}$$

mit bestimmten Koeffizienten α, β und γ, $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = .5$. Wir schreiben nun eine Funktion `f`, die diese Differentialgleichung enthält und speichern sie unter `f.m` ab:

```
function dy=f(y,t)
alpha=.5;
beta=.2;
gamma=.6;
dy(1)=alpha*y(1) - beta*y(2);
dy(2)=gamma*y(2)*y(1);
endfunction
```

Anschließend führt man folgende Kommandos auf der *octave*-Konsole aus:

```
t=0:.25:50;
y0=[1; .5];
y=lsode('f',y0,t);
plot(t,y);
```

`lsode('f',y0,t)` berechnet die Lösungen y_i von (2) numerisch. Die Ausgabe erfolgt in Form einer Matrix, deren i-te Spalte Funktionswerte von $y_i(t)$ im Intervall $[0, 50]$ enthält.

Plotten Sie außerdem für jeden der 3 genannten Anfangswerte die so errechneten Wertepaare $(N(t), P(t))$ in ein weiteres Diagramm, das die *Bahn* des Verlaufs in der NP-Ebene (dem sogenannten *Zustands-* oder *Phasenraum*) zeigt. (Im obigen Beispiel würde der entsprechende Befehl `plot(y(:,1),y(:,2))` lauten.) (10 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 2.2.2005, zu Beginn der Vorlesung. Bitte geben Sie immer auch einen Ausdruck des von Ihnen verfassten Programmcodes ab.