Dr. R. Tumulka, M. Fromm
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/06
8.12.2005

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Computer-Übungsblatt 7

Beispiel 11:

In *octave* läßt sich die Lösung x des LGS $Ax = b$ durch sog. Matrix-Links-Division `x=A\b` erhalten, dies führt intern eine Gauß-Elimination aus. Falls es mehrere Lösungen gibt, so liefert dieses Kommando eine spezielle. Falls es keine Lösung gibt, so liefert dieses Kommando eine näherungsweise Lösung.

Aufgabe C17. Sei U der von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie, ob $u^T = (3.5, 5.5, 2.5, -1)$ in U liegt, also sich in der Form

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c \tag{1}$$

schreiben läßt, und wenn ja, wie die Koeffizienten α, β, γ lauten. Anleitung: (1) ist offenbar ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Unbekannten α, β, γ. Es ist also jetzt der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

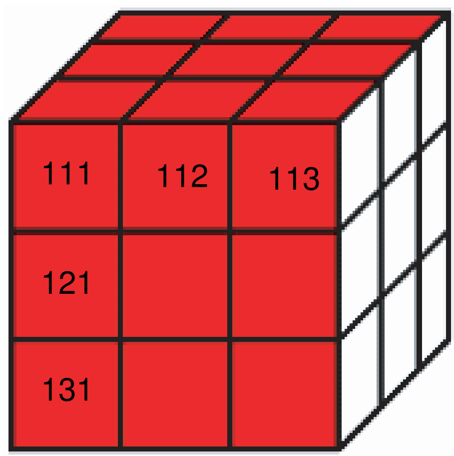
gesucht, wobei (1) die Form $Ax = u$ hat mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe C18. Tomographie in 3 Dimensionen

Ein Würfel W, der aus 27 kleinen Würfeln W_{ijk}, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ besteht, wird in mehreren Richtungen durchleuchtet.



In jedem kleinen Würfel W_{ijk} wird ein Anteil der einfallenden Lichtintensität absorbiert und der Anteil $\alpha_{ijk} \in [0,1]$ durchgelassen (transmittiert). Die austretenden Lichtintensitäten, wenn man eine Einheit einstrahlt, betragen

$$\begin{aligned}
\lambda_{jk} &= \alpha_{1jk} \cdot \alpha_{2jk} \cdot \alpha_{3jk} \\
\mu_{ik} &= \alpha_{i1k} \cdot \alpha_{i2k} \cdot \alpha_{i3k} \\
\nu_{ij} &= \alpha_{ij1} \cdot \alpha_{ij2} \cdot \alpha_{ij3}
\end{aligned}$$

entlang der drei Achsen sowie entlang der Diagonalen

$$\gamma_1 = \alpha_{111} \cdot \alpha_{122} \cdot \alpha_{133}, \ldots, \gamma_{11} = \alpha_{111} \cdot \alpha_{222} \cdot \alpha_{333}.$$

Diese Werte kann man experimentell bestimmen. Man möchte daraus die Transmissionskoeffizienten α berechnen. Dazu logarithmieren wir komponentenweise,

$$\log(\lambda_{jk}) = \log(\alpha_{1jk}) + \log(\alpha_{2jk}) + \log(\alpha_{3jk})$$

(analog für μ, ν, γ) und erhalten so ein LGS von 38 Gleichungen für die 27 Unbekannten $\log(\alpha_{ijk})$. Die Koeffizienten-Matrix A sowie die fiktiven Meßwerte $\lambda_{jk}, \mu_{ik}, \nu_{ij}, \gamma_l$ werden Ihnen vom Programm `tomo.m` bzw. der Datei `b.dat`, welche Sie auf der Vorlesungsseite herunterladen können, bereitgestellt. Laden Sie dazu unter unten angegebener Adresse ebendiese Dateien herunter und rufen Sie `tomo.m` unter *octave* durch `tomo` auf. Dies erzeugt die Koeffizienten-Matrix `A` und einen Vektor `b` von Meßwerten $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{jk}, \ldots, \mu_{ik}, \ldots, \nu_{33}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{11})^T$. Vesuchen Sie, das Programm `tomo.m` zu verstehen und drucken Sie die Liste der Transmissionskoeffizienten α. (6 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 15.12.2005, zu Beginn der Vorlesung. Bitte geben Sie immer auch einen Ausdruck des von Ihnen verfassten Programmcodes ab.
Die Seite der Vorlesung: `http://www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre/ws-2005-06/m4b`