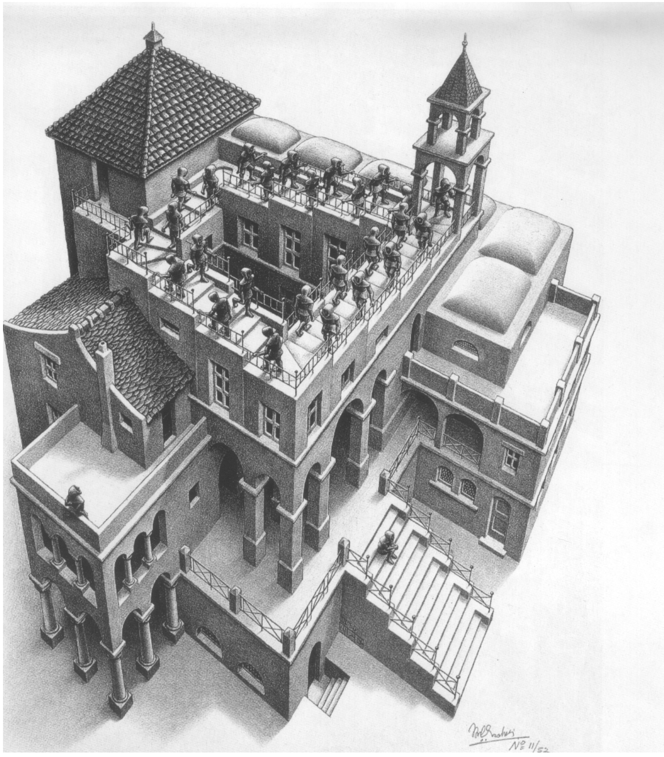
Dr. R. Tumulka, M. Fromm
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2005/06
22.12.2005

Mathematik I für Biologen, Geologen und Geoökologen

Computer-Übungsblatt 9



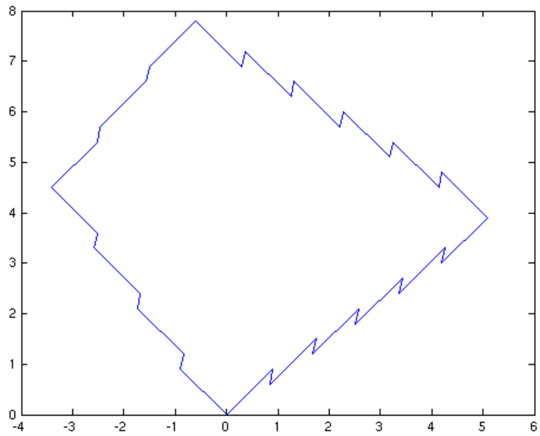


Abbildung 1: M. C. Escher (1898–1972), "Treppauf und treppab", Lithografie (1960).
Abbildung 2: Außenkante der Treppe als Polygonzug.

Aufgabe C21. Zeichnen Sie Eschers unmögliche Treppe (Abb. 1) nach, wie in Abb. 2.

Vorbemerkung: Während Escher Zentralperspektive benutzt hat, benutzen wir die (einfachere) Parallelperspektive. Was ist das? Die Zentralperspektive ist die korrekte Art des Abbildens (wie beim Auge oder Foto): Wir benutzen ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung am Ort des Beobachters und dem Bild in der Ebene $x_1 = 1$. Ein Objekt (oder ein Punkt eines Objekts) am Ort $u = (u_1, u_2, u_3)$ mit $u_1 > 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt in der Bildebene, der vom Beobachter aus gesehen in derselben Richtung liegt wie das Objekt, also $g_z(u) = u_1^{-1}u = (1, u_2/u_1, u_3/u_1)$; die relevanten Koordinaten im Bild sind $f_z(u) = (u_2/u_1, u_3/u_1) \in \mathbb{R}^2$. Bei der Parallelperspektive hingegen bildet man den Punkt u auf $g_p(u) = (1, u_2, u_3)$ ab; die relevanten Koordinaten sind $f_p(u) = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$. Die Parallelperspektive ist immer dann näherungsweise korrekt (bis auf eine zentrische Streckung), wenn sich die u_1-Werte der abgebildeten Objekte nicht stark unterscheiden. Während die Abbilder paralleler Geraden in der Zentralperspektive "zusammenlaufen", sind sie in der Parallelperspektive parallel. Noch etwas: Ein *Polygonzug* ist eine Aneinanderreihung gerader Strecken, von denen jede am Endpunkt der vorigen beginnt (wie z.B. in Abb. 2).

Anleitung zur Aufgabe: Wir verfolgen nur die Außenkante der Stufen und fassen (wie das Geländer in Eschers Bild) je drei Stufen zu einem Element zusammen. Wir betrachten drei Einheitsvektoren

$e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}^3$, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen; diese Vektoren repräsentieren die drei Achsen des Gebäudes in Abb. 1. Wir setzen $v_x = f_p(e_x), v_y = f_p(e_y), v_z = f_p(e_z)$. Kennen wir von einem Punkt u das Abbild $f_p(u)$, so finden wir $f_p(u + \lambda e_x) = f_p(u) + \lambda v_x$ und entsprechend für e_y, e_z.

Der Trick an der unmöglichen Treppe besteht darin, dass ein Polygonzug im $\mathbb{R}^3$, der eine Treppe entlang stets abwärts führt, unmöglich wieder am Ausgangspunkt ankommen kann, während sein Abbild sehr wohl am Abbild des Ausgangspunkts enden kann und daher in $\mathbb{R}^2$ einen geschlossenen Polygonzug bildet. Ist jede Stufe 10 cm hoch und 30 cm lang, dann ist jedes Stufenelement $\mu = 30$ cm hoch und $\lambda = 90$ cm lang. Der Weg im $\mathbb{R}^3$ entlang der Außenkante, an der mit dem Pfeil markierten Ecke beginnend, legt also zunächst die Strecke λ in x-Richtung zurück, dann $-\mu$ in z-Richtung, dann wieder λ in x-Richtung etc. (für die 6 Stufenelemente 6 mal λ in x-Richtung und 5 mal $-\mu$ in z-Richtung); dann λ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung etc. (6 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in x-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (3 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (4 Stufenelemente). Damit das Abbild dieses Weges geschlossen ist, muss in $\mathbb{R}^2$ gelten

$$6\lambda v_x - 5\mu v_z + 6\lambda v_y - 5\mu v_z - 3\lambda v_x - 2\mu v_z - 4\lambda v_y - 3\mu v_z = 0.$$

Wählen Sie Vektoren $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^2$ (zwei ausgesucht, der dritte aus der Gleichung bestimmt), die Eschers Bild einigermaßen nahekommen, und schreiben Sie ein Programm, das das Abbild des Weges in $\mathbb{R}^2$ plottet. (10 Punkte)

Anleitung: Einen Polygonzug zeichnet man in *octave* mit dem Ihnen bekannten Befehl `plot(x,y)`, dabei stehen in `x` und `y` die x- bzw. y-Koordinaten der zu verbindenden Punkte. Nach Definition der (Zeilen)-Vektoren `vx,vy,vz`, sowie Grössen λ und μ kann man sich nun schrittweise jeden Eckpunkt des Polygons berechnen, Beispiel:

```
u = [0 0];
u(2,:)= lambda*vx;
u(3,:)= u(2,:)-mu*vz;
plot(u(:,1),u(:,2));
```

zeichnet die (für uns) erste Stufe der Escher-Treppe. Es wird eine 1×2-Nullmatrix `u` definiert. Anschliessend fügt man mit `u(2,:)` eine Zeile hinzu, die aus dem Zeilenvektor `lambda*vx` besteht, dabei bewirkt der Doppelpunkt-Operator `:`, dass allen Einträgen der zweiten Zeile (also der zweiten Zeile selbst) der rechtsstehende Ausdruck zugewiesen wird. `u(:,`i`)`, $i = 1, 2$ bezeichnet hier die i. Spalte der Matrix `u`, deren 1. Spalte die x-Koordinaten und deren 2. Spalte die y-Koordinaten der zu plottenden Polygonzug-Punkte enthält, d.h. `u(1,1)` ist die x-Koordinate des ersten Punktes, `u(1,2)` seine y-Koordinate etc.. Schliesslich werden mit `plot(u(:,1),u(:,2));` alle Koordinaten-Paare geplottet.

Abgabe: Donnerstag, 12.1.2006, zu Beginn der Vorlesung. Bitte geben Sie immer auch einen Ausdruck des von Ihnen verfassten Programmcodes ab.