10 Differenzialrechnung

Definition. Man sagt, die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ *habe den Grenzwert* λ *im Punkt* b,

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lambda,$$

wenn für jede Folge b_n in D mit $b_n \to b$ gilt $f(b_n) \to f(b)$.

Beachte: b muss nicht in D liegen, d.h. $f(b)$ ist möglicherweise nicht definiert, und das ist tatsächlich der Hauptanwendungsfall. Nicht jede Funktion hat in jedem Punkt einen Grenzwert (Gegenbeispiel Heaviside-Funktion in 0). Wenn $b \in D$ und $\exists \lim_{x \to b} f(x)$, dann $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Wir führen nun den Begriff der Ableitung ein, heute nur für Funktionen von einer Variablen $x \in \mathbb{R}$, nächsten Monat auch für Funktionen von mehreren Variablen, d.h. für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$.

Definition: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ heißt *differenzierbar im Punkt* $x \in [a, b]$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Dieser Wert heißt der *Differenzialquotient* oder *die (erste) Ableitung von* f *in* x. Ist f auf dem gesamten Definitionsbereich $D = [a, b]$ differenzierbar, so heißt die dadurch definierte Funktion $f' : D \to \mathbb{R}^d$ die *(erste) Ableitung von* f. Ist f' wiederum auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' die *zweite Ableitung* von f, f''. Ist f'' auch auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f'' die *dritte Ableitung* von f, f''', und so weiter.

Bemerkung: Der Limes bezieht sich auf h, wir betrachten also die Funktion

$$g(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und betrachten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} g(h).$$

Hierbei ist $g(0)$ nicht definiert; der Definitionsbereich von g ist $[a - x, b - x] \setminus \{0\}$.

Geometrische Deutung des Wertes $g(h)$ für $d = 1$: Steigung der Sekante durch den Graphen von f in x und $x + h$. Daher die geometrische Deutung von $f'(x)$ für $d = 1$: Steigung der Tangente an den Graphen von f in x. Folgerung: die Tangente in x ist der Graph der Funktion $T(u) = f(x) + f'(x)(u - x)$, denn es muss gelten $T(u) = \alpha u + \beta$ (Gerade), $\alpha = f'(x)$ (Steigung), und $T(x) = f(x)$.

Die Tangente T eignet sich als *Näherungsfunktion* für f in der Nähe von x. Z.B. $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$ für kleine h; hier $f(u) = \sqrt{u}$, $f'(u) = 1/2\sqrt{u}$, $x = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2}$,

$T(u) = 1 + \frac{1}{2}(u-1)$, $u = 1+h$. Anwendung: Gemessen wurde die Variable x mit einer Ungenauigkeit von $\pm\delta x$, gesucht ist der Wert der Variablen $y = f(x)$; mit welcher Ungenauigkeit δy ist dieser Wert behaftet? Näherungsweise $\delta y = |f'(x)|\,\delta x$.

Beispiel: Ein punktförmiges Objekt befindet sich zur Zeit t am Ort $f(t) \in \mathbb{R}^3$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ bezeichnet man auch als *Kurve* im $\mathbb{R}^d$. Die *mittlere Geschwindigkeit* im Zeitintervall $[a,b]$ ist offenbar

$$\overline{v} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

hingegen ist die *Geschwindigkeit (Momentangeschwindigkeit)* zur Zeit $t \in [a,b]$ gerade $v(t) = f'(t)$. Für die Ableitung nach der Zeit schreibt oft einen Punkt statt eines Strichs, $\dot{f}$ statt f'. Statt des Geschwindigkeitsvektors $\dot{f}(t)$ interessiert manchmal nur die Geschwindigkeit als Zahl, und das ist gerade die Norm $\|\dot{f}(t)\|$. Die *Bewegungsrichtung* ist charakterisiert durch den Einheitsvektor in Richtung von $\dot{f}(t)$, $e_{\dot{f}(t)} = \|\dot{f}(t)\|^{-1}\dot{f}(t)$. Die Tangente an eine Kurve im $\mathbb{R}^d$ (gegeben durch die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$) im Punkt $f(t)$ ist demnach die (eindeutige) Gerade durch $f(t)$ in Richtung $e_{\dot{f}(t)}$, also

$$T = \{f(t) + \alpha\dot{f}(t) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Die zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$ gibt die *Beschleunigung* an, also wie schnell (und in welche Richtung) sich der Geschwindigkeitsvektor $\dot{f}(t)$ mit der Zeit ändert.

Bedeutung von $f(t)$	Bezeichnung für $\dot{f}(t)$
Position [m]	Geschwindigkeit [ms^{-1}]
Geschwindigkeit [ms^{-1}]	Beschleunigung [ms^{-2}]
Winkel []	Winkelgeschwindigkeit [s^{-1}]
Menge [X]	Zuwachsrate [Xs^{-1}]
Energie [Joule]	Leistung [Watt]
el. Ladung [Coulomb]	el. Strom [Ampere]

Schreibweise:

$$f' = \frac{df}{dx} \text{ oder } \frac{df}{dt}$$

wenn die Variable, von der die Funktion f abhängt, x bzw. t heißt.

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen.

f	f'
$x \mapsto c$	0
$x \mapsto \alpha x$	α
$(\alpha \in \mathbb{R})$	
$x \mapsto x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto 1/x$	$x \mapsto -1/x^2$
exp	exp
log	$x \mapsto 1/x$
sin	cos
cos	$-\sin$

Satz (Summen- und Produktregel). Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, so auch $f + g$ und αf für $\alpha \in \mathbb{R}$, und $(f+g)' = f' + g'$ und $(\alpha f)' = \alpha f'$. Im Fall $d = 1$ ist auch fg differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

Beispiel: Ableitung eines Polynoms

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Satz (Kettenregel). Sind $g : [a,b] \to [c,d]$ und $f : [c,d] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, dann ist die verkettete Funktion $h = f \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}^d : x \mapsto f(g(x))$ differenzierbar mit $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Beispiele: $(e^{-\lambda x})' = -\lambda e^{-\lambda x}$, $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$.

Extrema: Oft sucht man von einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wo sie ihr Maximum und wo ihr Minimum annimmt. Für Maximum oder Minimum sagt man auch Extremum.

Satz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat im Punkt $x \in (a,b)$, der nicht am Intervallende liegt, ein Extremum, dann gilt $f'(x) = 0$.

Grund: Wäre $f'(x) < 0$, dann wäre die Tangente an f im Punkt x nicht horizontal, sondern abwärts geneigt, und für sehr kleine Zahlen $\varepsilon > 0$ würde gelten $f(x - \varepsilon) \approx f(x) - f'(x)\varepsilon > f(x)$, da $f'(x) < 0$. Also kann f bei x kein Maximum haben. Wäre aber $f'(x) > 0$, dann wäre $f(x + \varepsilon) \approx f(x) + f'(x)\varepsilon > f(x)$. Also kann wiederum f bei x kein Maximum haben. Ebenso mit Minima.