11 Integration

Definition. Ist die Fkt $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ die Ableitung der Fkt $F : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, so heißt F eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* von f.

Bemerkung. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F+C$ eine Stammfunktion von f, wobei $C \in \mathbb{R}^d$ eine beliebige Konstante ist. Beweis: $(F + C)'$ ist nach der Summenregel $F'+C'$; die Ableitung einer Konstanten ist Null; also $(F+C)' = F' = f$.$\square$

Satz. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f' = 0$ auf ganz $[a, b]$, so ist f konstant.

Beispiel: Fährt ein Auto mit der Geschwindigkeit Null, so kommt es nicht vom Fleck.

Folgerung aus dem Satz. Ist F eine Stammfunktion von f, so sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}^d$. In anderen Worten, je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um die Addition einer Konstanten. Beweis: Seien F und G zwei Stammfunktionen von f, also $F' = f = G'$. Dann hat die Fkt $F - G$ Ableitung Null, denn $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Dem Satz zufolge ist die Fkt $F - G$ konstant, also gibt es ein $C \in \mathbb{R}^d$ mit $F - G = C$, daher $G = F - C$. $\square$

Integration ist das kontinuierliche Analogon zur Summation oder Mittelung.

Beispiele. 1) Zeitmittel der Temperatur. Sei $T(t)$ die Temperatur an einem Ort zur Zeit t. Anstelle des Mittelwerts der Temperaturen zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$,

$$\overline{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T(t_i)$$

(z.B. Mittagstemperaturen im Januar) möchten wir über alle Zeitpunkte im Intervall $[a, b]$ mitteln (z.B. Monatsdurchschnittstemperatur über Tag und Nacht). Dieser Wert lautet in Integralschreibweise

$$\overline{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(t)\, ds\,.$$

Der Wert kann näherungsweise durch Mittelung über n Zeitpunkte bestimmt werden, wenn man hinreichend viele Zeitpunkte in gleichmäßigen Abständen wählt, nämlich so viele, dass sich $T(t)$ zwischen zwei Zeitpunkten nicht nennenswert verändert (z.B. alle halbe Stunde). Liegen die Zeitpunkte nicht in gleichmäßigen Abständen, so ist ein *gewichtetes Mittel* zu verwenden, nach dem Schema

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^{n} g_i T_i\,,$$

in dem die Koeffizienten $g_i \geq 0$ die “Gewichte” heißen und

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$$

erfüllen müssen. Das herkömmliche Mittel entspricht $g_i = 1/n$ für jedes i. Zur Approximation des kontinuierlichen Zeitmittels ist das Zeitintervall $[a, b]$ so in Teilintervalle $[a_i, b_i]$ zu zerlegen, dass $t_i \in [a_i, b_i], b_i = a_{i+1}, a_1 = a, b_n = b$, und

$$g_i = \frac{b_i - a_i}{b - a}$$

Diese approximative Berechnung des Zeitmittels ist dann exakt, wenn die Fkt T auf jedem Teilintervall $[a_i, b_i]$ konstant ist. Eine andere Notation für $b_i - a_i$ ist Δt.

2) Gesamtniederschlag, Gesamtsonneneinstrahlung. Wenn die Fkt $f(t)$ angibt, wieviel Niederschlag pro Zeit (mm/h) oder Sonneneinstrahlung (Watt/m^2) zur Zeit t an einem Ort eingegangen sind, so beträgt der im Zeitintervall $[a, b]$ kumulierte (angehäufte) Gesamtniederschlag bzw. Gesamtsonneneinstrahlung

$$G = \int_a^b f(t)\, dt$$

in mm bzw. Joule/m^2 (Energie/Fäche). Würde der Niederschlag nicht verteilt über ein Zeitintervall niedergehen, sondern schlagartig zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots t_n \in [a, b]$ in den Mengen $G_1, \ldots, G_n$, so wäre die korrekte Formel

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i \, .$$

In diesem Fall wäre die f-Funktion nicht aussagekräftig, weil $f = \infty$ an den Zeitpunkten t_i und $f = 0$ sonst.

3) Flächeninhalte. Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Fkt $f \geq 0$, der Abszisse (x-Achse), und den Geraden $x = a$ und $x = b$ ist gegeben durch das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Für eine Fkt f, die auch negative Werte annimmt, ist das Integral gerade $A_+ - A_-$, wobei A_+ die Fläche oberhalb der Abszisse und A_- die unterhalb ist. In anderen Worten, jedes Flächenstück wird mit dem Vorzeichen von f versehen.

Satz und Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle $[a_{n,i}, b_{n,i}], i \in \{1, \ldots, n\}, a_{n,i+1} = b_{n,i}, a_{n,1} = a, b_{n,n} = b$, so dass für die *Maschenweite*

$$\delta_n = \max_{i=1}^{n} (b_{n,i} - a_{n,i})$$

gilt $\delta_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Die *Riemannsche Obersumme* $S_O(n)$ für die n-te Zerlegung beträgt

$$S_O(n) := \sum_{i=1}^{n} \max\{f(x) : x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]\}\, (b_{n,i} - a_{n,i}) \, ,$$

die *Riemannsche Untersumme* $S_U(n)$

$$S_U(n) := \sum_{i=1}^{n} \min\{f(x) : x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]\}\,(b_{n,i} - a_{n,i})\,.$$

Dann existiert eine Zahl, das *Integral von f über* $[a, b]$,

$$\xi = \int_a^b f(x)\,dx$$

so dass $S_O(n) \xrightarrow{n\to\infty} \xi$ und $S_U(n) \xrightarrow{n\to\infty} \xi$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f = F'$ stetig, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ gegeben, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$$

eine Stammfunktion von f.

Beispiel zur Benutzung des Hauptsatzes zur Berechnung von Integralen. Nach dem ersten Teil des Hauptsatzes kann man $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen, indem man eine Stammfkt F von f findet und $F(b) - F(a)$ bestimmt. Integration eines Polynoms

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k\,x^k\,dx =?$$

Eine Stammfkt von x^k ist $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$. Aufgrund der Summen- und der Vielfachenregel der Differenziation $[(f + g)' = f' + g', (\alpha f)' = \alpha f']$ ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_{i-1}}{i} x^i + C$$

eine Stammfkt des Integranden für jedes $C \in \mathbb{R}$ (und damit alle Stammfunktionen). Daher beträgt das gesuchte Integral

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_{i-1}}{i}(b^i - a^i)\,.$$

Nicht immer kann die Stammfunktion durch eine Formel ausgedrückt werden. Bsp: Die Gauß-Fkt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist stetig und besitzt nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy\,.$$

Diese lässt sich aber nicht durch eine Formel ausdrücken (außer eben, indem man Integrale in der Formel zulässt).

Weitere Beispiele für die Bedeutung von Integration.

5) Mechanische Arbeit = Kraft mal Weg, vorausgesetzt, die Kraft ist entlang des Weges konstant. [Beispiel: Um ein Gewicht von 1 kg um einen Meter anzuheben, muss man seine Schwerkraft $K = mg$ (m = Masse, hier 1 kg, g = Schwerefeldstärke auf der Erde = 9,81 m/s^2; also hier K = 9.81 kg m/s^2 = 9.81 Newton) durch eine Hebekraft überwinden. Der weitere Kraftaufwand, um der Gewicht in Bewegung zu setzen, ist beliebig gering. Der erforderliche Aufwand an mechanischer Arbeit beträgt demnach $A = Ks$, hier 9.81 Nm (Newton Meter) = 9.81 Joule.] Ist nun aber die Kraft nicht konstant, sondern beträgt nach Wegstrecke s gerade $K(s)$, so gilt

$$A = \int_{s_1}^{s_2} K(s)\,ds\,.$$