12 Mehr zu Integration, Differentiation und Grenzwerten

Definition. Man sagt: die Zahlenfolge a_n *geht gegen unendlich*, $a_n \to \infty$, wenn $\forall r > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n > r$. In Worten: wenn jeder noch so große Wert r schließlich endgültig überschritten wird. Man sagt: a_n *geht gegen minus unendlich*, $a_n \to -\infty$, wenn $-a_n \to \infty$.

Für die Funktion (Sättigungskurve)

$$f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

mit $\lambda > 0$ gilt: Für jede Zahlenfolge a_n mit $a_n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to 1$. Diesen Sachverhalt drückt man aus durch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 1.$$

Definition. Zwei Funktionen $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißen *asymptotisch zueinander*, wenn $f(x) - g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

Beispiel: $f(x)$ wie oben, $g(x) = 1$. Anderes Bsp: $f(x) = 1/x$, $g(x) = 0$.

Beispiele zur Integration

Bsp 1. Wahrscheinlichkeiten bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeits-Verteilungen. Nehmen wir an, eine Zufallsgröße X habe als Wahrscheinlichkeitsverteilung die Gauß-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

D.h., $f(x)$ gibt die *Wahrscheinlichkeitsdichte* am Wert x an. Der wahrscheinlichste Wert für X ist das Maximum von f, μ. Die Wahrscheinlichkeit, dass (der zufällige Wert von) X im Intervall $[a, b]$ liegt, beträgt

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Dasselbe gilt nicht nur für die Gauß-Verteilung, sondern für jede kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, beschrieben durch die Dichtefunktion f mit $f \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1\,.$$

Hierbei stoßen wir auf die Notwendigkeit, nicht nur Integrale über endliche Intervalle $[a, b]$ einzuführen, sondern auch mit Grenzen im Unendlichen.

Dabei kann man das Integral von $-\infty$ bis ∞ auffassen als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Bsp 2. Mittelwert (Erwartungswert) bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeits-Verteilungen. Der lautet

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx\,.$$

Dies entspricht bei einer diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung dem gewichteten Mittel

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass X den Wert x_i annimmt.

Bsp 3. Dichte ρ oder spezifisches Gewicht ist Masse pro Volumen (in g/cm^3). Natürlich kann die Dichte von Ort zu Ort variieren; z.B. nimmt die Dichte der Luft mit der Höhe ab. Gibt die Fkt $h \mapsto \rho(h)$ die Dichte als Fkt der Höhe an, so beträgt die Masse einer Luftsäule der Höhe H mit Grundfläche G gerade

$$m = G\int_0^H \rho(h)\,dh.$$

Bsp 4. Energieverteilung im Lichtspektrum. (Licht besteht aus verschiedenen Wellenlängen λ, für sichtbares Licht im Bereich 400 nm (violett) bis 800 nm (rot); es gilt $c = \lambda\nu$ für Ausbreitungsgeschwindigkeit c und Frequenz ν. Beim Schall ist die Tonhöhe proportional zu $\log\nu$.) Sei $I(\lambda)$ die Intensität der Komponente des Lichts mit Wellenlänge λ, genauer gesagt die *spektrale Energiedichte*, dann ist der Energieinhalt

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\,d\lambda.$$

Der Energieinhalt des spektralen Intervalls $[a, b]$ beträgt

$$I(a, b) = \int_a^b I(\lambda)\,d\lambda.$$

Ist $I(\lambda)$ auf dem Intervall konstant, so beträgt $I(a, b) = I(\lambda)\,(b - a)$. Betrachten wir ein "infinitesimales" (unendlich kleines) spektrales Intervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, so beträgt der Energieinhalt $I(\lambda, \lambda+d\lambda) = I(\lambda)\,d\lambda$. Die *additive Farbmischung* (Zusammenfügung von Licht) entspricht der Addition der spektralen Energiedichten, $I_{\text{gesamt}}(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$.

Bsp 5. Anregung des Zapfens. Die Netzhaut enthält zwei Arten von Sehzellen, *Stäbchen* (geeignet für schwache Beleuchtung) und *Zapfen* (farbspezifisch); von Zapfen gibt es drei Typen, die grob gesagt auf drei verschiedene Intervalle des Spektrums von 400 nm bis 800 nm ansprechen ("rot", "grün" und "blau"). Dadurch wird also die physikalische Farbe, definiert durch die Energieverteilung $I(\lambda)$, vergröbert ans Hirn weitergegeben in nur noch drei Werten E_r, E_g, E_b, den Erregungsstärken der drei Typen von Zapfen. Infolgedessen ist der *Farbenraum* (die Menge aller möglichen Farben) 3-dimensional, mit Koordinaten E_r, E_g, E_b oder Helligkeit, Sättigung und ein Parameter für den Farbton. Die Menge der physikalischen Farben ist hingegen ∞-dimensional, weil für jedes λ die Intensität $I(\lambda)$ unabhängig gewählt werden kann. (Deshalb mischt ein Fernseher nur rot, grün und blau; er gibt also Farben physikalisch falsch wieder, aber so, dass der Fehler dem Menschen nicht auffällt.)

Genauer gesagt besitzt jeder Typ $i \in \{r, g, b\}$ von Zapfen eine *Empfindlichkeitsfunktion* $\varphi_i(\lambda)$, die angibt, wie stark der Zapfen auf Licht der Wellenlänge λ reagiert. Die Reizstärke R_i bei Licht mit spektraler Energiedichte $I(\lambda)$ beträgt daher

$$R_i = \int_{400\text{ nm}}^{800\text{ nm}} \varphi_i(\lambda)\, I(\lambda)\, d\lambda$$

und die Erregungsstärke $E_i = \text{const.} \log R_i$. Folgerung: bei additiver Farbmischung addieren sich auch die Reizstärken, $R_{i,\text{gesamt}} = R_{i,1} + R_{i,2}$. Das legt nahe, im Farbenraum die R_i als Koordinaten zu benutzen.

Bsp 6. Lichtabsorption nach Farbe. Schema der Absorption: $I_{heraus} = \alpha\, I_{herein}$, $\alpha =$ Transmissionskoeffizient. Hängt α von λ ab, $I_{heraus}(\lambda) = \alpha(\lambda)\, I_{herein}(\lambda)$, dann berechnet sich die austretende Gesamtintensität gemäß

$$I_{heraus} = \int_0^\infty I_{heraus}(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \alpha(\lambda)\, I_{herein}(\lambda)\, d\lambda.$$

(Dieser Wert lässt sich nicht allein aus der einfallenden Gesamtintensität I_{herein} bestimmen, denn er hängt von der Verteilung der Energie über das Spektrum ab.)

Bsp 6. Lichtabsorption in einem inhomogenen Medium. Zwei absorbierende Medien fügen sich gemäß $I_{heraus} = \alpha_2\, \alpha_1\, I_{herein}$ zusammen, also $\log I_{heraus} = c_2 + c_1 + \log I_{herein}$ mit $c_k = \log \alpha_k$. Ein Medium heißt *inhomogen*, wenn die Materialeigenschaften von Ort zu Ort variieren. In einem homogenen Medium der Dicke ℓ ist $\alpha = e^{-\gamma\ell}$ oder $c = -\gamma\ell$, wobei ich die Materialkonstante $\gamma > 0$ die (logarithmische) Absorptionsdichte nennen würde. Je größer γ, umso stärker absorbiert das Material. In einem inhomogenen Medium hängt γ vom Ort x (entlang des Lichtstrahls) ab, und wir erhalten

$$c = -\int_0^\ell \gamma(x)\, dx$$

bzw.

$$\alpha = e^{-\int_0^\ell \gamma(x)\, dx}.$$

Beispiel 7: Freier Fall. Ein Gegenstand der Masse m bewegt sich unter Einfluss der Schwerkraft $K = (0, 0, -mg)$, wo $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ die Feldstärke des Erdschwerefeldes in Bodennähe ist, entlang der Bahnkurve $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^3$. Wir vernachlässigen die Luftreibung (daher "*freier*" Fall). Nach Newtons Gesetz Kraft = Masse mal Beschleunigung ergibt sich:

$$\ddot{f}(t) = -(0, 0, g).$$

Das ist eine *Differenzial-Gleichung*, hier in der Rolle eines Bewegungs-Gesetzes. Wir prüfen nach, dass $f(t) = u + vt - \frac{1}{2}(0, 0, g)t^2$ für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^3$ diese Gleichung erfüllt (und dann die eindeutige Lösung ist). Nach der Summenregel gilt $\dot{f}(t) = (u)^{\cdot} + (vt)^{\cdot} - (\frac{1}{2}(0, 0, g)t^2)^{\cdot} = 0 + v - (0, 0, g)t$ und weiter $\ddot{f} = (v)^{\cdot} - ((0, 0, g)t)^{\cdot} = 0 - (0, 0, g)$. Durch Einsetzen von $t = 0$ in $f(t)$ bzw. $\dot{f}(t)$ sieht man, dass u die Anfangsposition ist und v die Anfangsgeschwindigkeit. Legt man (durch Verschieben des Koordinatensystems) u in den Ursprung und v in die x_1x_3-Ebene, erhält man eine ebene Figur, die *Wurfparabel*.